Correction des exercices 1 et 2 du TD1

Exercice 1

$$\hat{x}(\nu) = \cos\frac{\pi\nu}{2B} \quad \text{si } \nu \in [-B, B]$$

$$= 0 \quad \text{ailleurs.}$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\nu)\, e^{2i\pi\nu t}\, d\nu$$

$\hat{x}(\nu)$ étant paire, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\nu)\, e^{2i\pi\nu t}\, d\nu = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\nu) \cos 2\pi\nu t\, d\nu$

$$= 2\int_0^{+\infty} \hat{x}(\nu) \cos 2\pi\nu t\, d\nu$$

$$= 2\int_0^{B} \cos\frac{\pi\nu}{2B} \cos 2\pi\nu t\, d\nu$$

On utilise la formule : $2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$

$$\Rightarrow x(t) = \int_0^B \cos 2\pi\nu\left(t + \frac{1}{4B}\right) d\nu + \int_0^B \cos 2\pi\nu\left(t - \frac{1}{4B}\right) d\nu$$

$$= \frac{1}{2\pi\left(t+\frac{1}{4B}\right)} \left[\sin 2\pi\nu\left(t+\frac{1}{4B}\right)\right]_0^B + \frac{1}{2\pi\left(t-\frac{1}{4B}\right)} \left[\sin 2\pi\nu\left(t-\frac{1}{4B}\right)\right]_0^B$$

$$= \frac{\sin\left(2\pi B t + \frac{\pi}{2}\right)}{2\pi\left(t+\frac{1}{4B}\right)} + \frac{\sin\left(2\pi B t - \frac{\pi}{2}\right)}{2\pi\left(t-\frac{1}{4B}\right)}$$

$\sin\left(2\pi Bt + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2\pi B t$, $\quad \sin\left(2\pi B t - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos 2\pi B t$

$$x(t) = \frac{\cos 2\pi B t}{2\pi}\left[\frac{1}{t+\frac{1}{4B}} - \frac{1}{t-\frac{1}{4B}}\right]$$

$$= \frac{4B\cos 2\pi B t}{\pi}\,\frac{1}{(1+4Bt)(1-4Bt)}$$

On peut échantillonner à des périodes T_e vérifiant

$$T_e \leq \frac{1}{2B} \Rightarrow T_e = \frac{1}{2B} \text{ convient.}$$

La formule de Poisson permet d'affirmer que

si $T_e \leq \frac{1}{2B}$, pour tout $\nu \in \left[-\frac{1}{2T_e}, \frac{1}{2T_e}\right]$,

$$\hat{x}(\nu) = T_e \sum_{m\in\mathbb{Z}} x(mT_e)\, e^{-2i\pi m \nu T_e}$$

Il suffit de choisir $T_e = \frac{1}{2B}$ pour obtenir :

$$\hat{x}(\nu) = \frac{1}{2B}\sum_{m\in\mathbb{Z}} x\left(\frac{m}{2B}\right) e^{-2i\pi\frac{m\nu}{2B}} \qquad \forall \nu \in [-B, B]$$

On prend $\nu = 0$ dans cette égalité

$$x\left(\frac{m}{2B}\right) = -\frac{4B\cos m\pi}{\pi}\,\frac{1}{(2m+1)(2m-1)} = \frac{4B}{\pi}\,\frac{(-1)^{m+1}}{(2m+1)(2m-1)}$$

et on obtient que $\displaystyle\sum_m \frac{(-1)^{m+1}}{(2m+1)(2m-1)} = \frac{\pi}{2}$

Exercice 3

$$[-B, B] \subset \left[-\frac{F_e}{2}, \frac{F_e}{2}\right] \quad , \quad T_e = \frac{1}{F_e}$$

D'après la formule de Poisson,

$$X(\nu) = T_e \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(nT_e)\, e^{-2i\pi n \nu T_e} \qquad \text{si } \nu \in \left[-\frac{F_e}{2}, \frac{F_e}{2}\right]$$

On prend $\nu = 0$:

$$X(0) = T_e \sum_n x(nT_e)$$

Or, $X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt \implies \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt = T_e \sum_n x(nT_e)$

Par ailleurs, $Y(\nu) = T_e \sum_{m \in \mathbb{Z}} y(mT_e)\, e^{-2i\pi m \nu T_e}$ si $\nu \in \left[-\frac{F_e}{2}, \frac{F_e}{2}\right]$

Donc, $X(\nu)\, Y^*(\nu) = T_e^2 \left(\sum_n x(nT_e)\, e^{-2i\pi n \nu T_e}\right)\left(\sum_m y(mT_e)\, e^{-2i\pi m \nu T_e}\right)^*$

$$= T_e^2 \sum_{n,m} x(nT_e)\, y^*(mT_e)\, e^{-2i\pi \nu T_e (n-m)}$$

$$\implies \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, y^*(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\, Y^*(\nu)\, d\nu = \int_{-\frac{1}{2T_e}}^{\frac{1}{2T_e}} X(\nu)\, Y^*(\nu)\, d\nu$$

$$= T_e^2 \sum_{n,m} x(nT_e)\, y^*(mT_e) \underbrace{\int_{-\frac{1}{2T_e}}^{\frac{1}{2T_e}} e^{-2i\pi(n-m)T_e \nu}\, d\nu}_{\substack{1/T_e \text{ si } n=m \\ 0 \text{ si } n \neq m}}$$

Par conséquent,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, y^*(t)\, dt = T_e \sum_n x(nT_e)\, y^*(nT_e)$$

On considère t fixé, et
On choisit d'appliquer cette égalité aux fonctions

$x(s) = z_1(s)$ et $y(s) = z_2^*(t-s)$;

$$\int_{-\infty}^{\infty} z_1(s)\, z_2(t-s)\, ds = T_e \sum_n z_1(nT_e)\, z_2(t-nT_e)$$

$\Rightarrow$ si $z_1(t)$ et $z_2(t)$ sont 2 signaux de bande passante $[-B, B]$, et si $T_e \leq \frac{1}{2B}$:

$$(z_1 * z_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} z_1(s)\, z_2(t-s)\, ds = T_e \sum_n z_1(nT_e)\, z_2(t-nT_e)$$

Par conséquent,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, y^{*}(t)\, dt = T_e \sum_{n} x(nT_e)\, y^{*}(nT_e)$$

On applique cette égalité à $z_1(s) = x(s)$ et

$z_2(s) =$