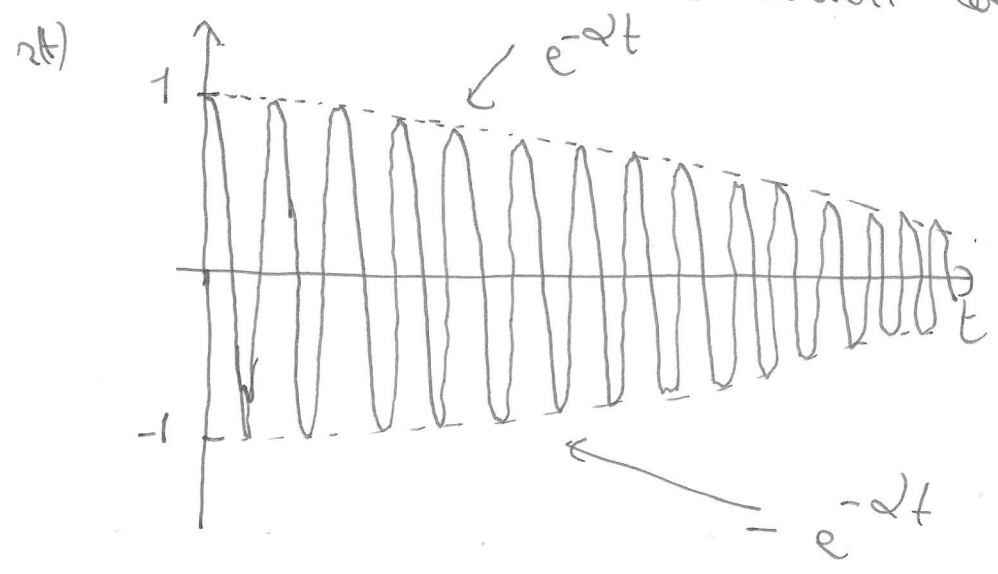


Exercice 1

$$z(t) = e^{-\alpha t} \cos(2\pi\nu_0 t) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t), \quad \alpha > 0, \quad \alpha \ll \nu_0.$$

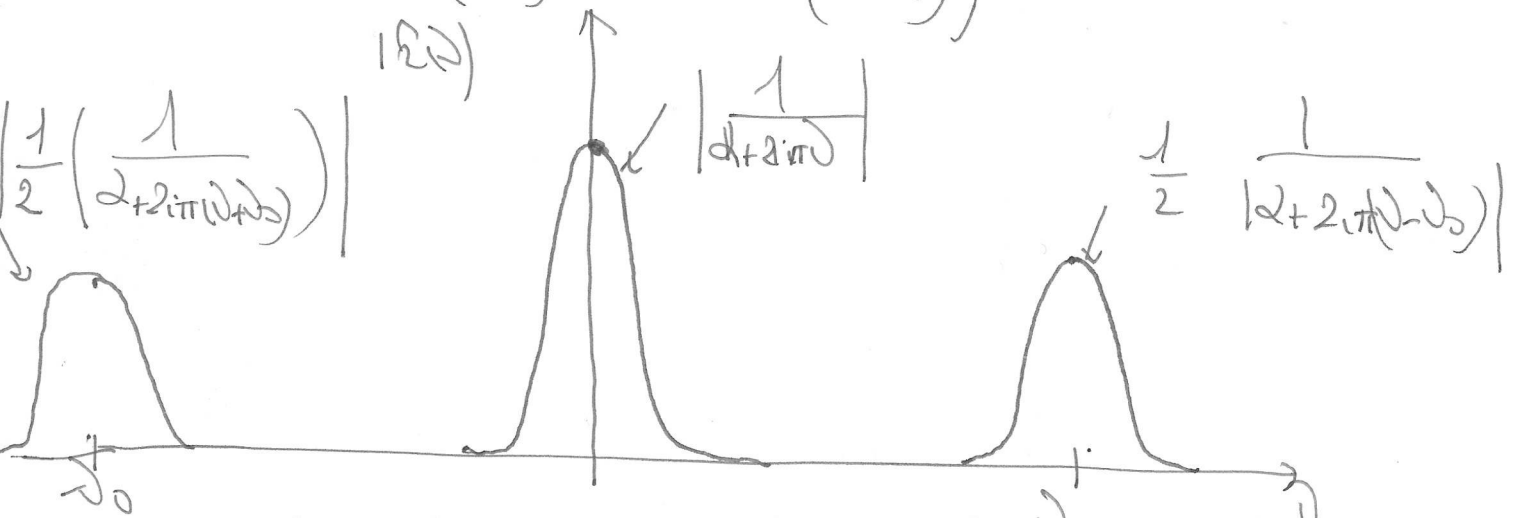
L'hypothèse $\alpha \ll \nu_0$ implique que $\cos(2\pi\nu_0 t)$ varie beaucoup plus vite que $e^{-\alpha t}$. Dès lors, le graphe de $z(t)$ ressemble à celui d'une sinusoïde amortie, mais dont l'amplitude des maxima de la valeur absolue décroît lentement.



La transformée de Fourier de la fonction $t \rightarrow e^{-\alpha t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t)$

est égale à $\frac{1}{\alpha + 2i\pi\nu}$. Par conséquent,

$$\hat{z}(\nu) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha + 2i\pi(\nu - \nu_0)} + \frac{1}{\alpha + 2i\pi(\nu + \nu_0)} \right).$$



La fonction $\omega \rightarrow \frac{1}{|\omega + 2\pi n|}$ décroît sur \mathbb{R}^+ . A titre
 indicatif, si $2\pi \omega_0 = \omega$, $\frac{1}{|\omega + 2\pi n|}$ se réduit à un facteur 2,

ce qui correspond à une atténuation de 6 dB. Puisque $\omega \ll \omega_0$,
 il est clair qu'aux alentours de la fréquence ω_0

$\frac{1}{|\omega + 2\pi n|} \approx 0$. Par ailleurs, les "supports" des
 fonctions $\frac{1}{|\omega + 2\pi n|}$ et $\frac{1}{2|\omega + 2\pi n - \omega_0|}$ et $\frac{1}{2|\omega + 2\pi n(\omega + \omega_0)|}$

sont à peu près disjoints, ainsi que le graphe précédent le
 montre.

$t \rightarrow |\cos 2\pi \omega_0 t|$ est périodique de période $\frac{1}{2\omega_0}$. Il s'agit de
 plus une fonction paire. Donc, son développement en série de Fourier se
 réduit à :

$$|\cos 2\pi \omega_0 t| = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} a_m \cos 2\pi m \frac{t}{\left(\frac{1}{2\omega_0}\right)} = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos 4\pi m \omega_0 t$$

$$\text{ou } a_m = \frac{2}{\frac{1}{2\omega_0}} \int_{-\frac{1}{4\omega_0}}^{\frac{1}{4\omega_0}} |\cos 2\pi \omega_0 t| \cos 2\pi m \frac{t}{\frac{1}{2\omega_0}} dt$$

$$= \frac{4\omega_0}{2} \int_{-\frac{1}{4\omega_0}}^{\frac{1}{4\omega_0}} |\cos 2\pi \omega_0 t| \cos 4\pi m \omega_0 t dt = 8\omega_0 \int_0^{\frac{1}{4\omega_0}} |\cos 2\pi \omega_0 t| \cos 4\pi m \omega_0 t dt$$

$$= 8\omega_0 \int_0^{\frac{1}{4\omega_0}} \cos 2\pi \omega_0 t \cos 4\pi m \omega_0 t dt \quad \text{car } \cos 2\pi \omega_0 t \geq 0 \text{ si } t \in \left[0, \frac{1}{4\omega_0}\right].$$

(3)

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\begin{aligned} \cos 2\pi n_0 t \cos 4\pi m_0 t &= \frac{1}{2} \cos(4\pi m_0 + 2\pi n_0)t + \frac{1}{2} \cos(4\pi m_0 - 2\pi n_0)t \\ &= \frac{1}{2} \cos 2\pi(2m_0 + n_0)t \\ &= \frac{1}{2} \cos 2\pi n_0(2m+1)t + \frac{1}{2} \cos 2\pi n_0(2m-1)t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int_0^{\frac{1}{4T_0}} \cos 2\pi n_0 t \cos 4\pi m_0 t \, dt = \\ &\frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{4T_0}} \cos 2\pi n_0(2m+1)t \, dt + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{4T_0}} \cos 2\pi n_0(2m-1)t \, dt = \\ &\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2\pi n_0(2m+1)} \left(\sin 2\pi n_0(2m+1)t \right) \Big|_0^{\frac{1}{4T_0}} + \frac{1}{2\pi n_0(2m-1)} \left(\sin 2\pi n_0(2m-1)t \right) \Big|_0^{\frac{1}{4T_0}} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi n_0} \left[\frac{1}{2m+1} \sin \frac{\pi}{2}(2m+1) + \frac{1}{2m-1} \sin \frac{\pi}{2}(2m-1) \right] \end{aligned}$$

$$\sin \frac{\pi}{2}(2m+1) = \sin \left(\frac{\pi}{2} + m\pi \right) = (-1)^m$$

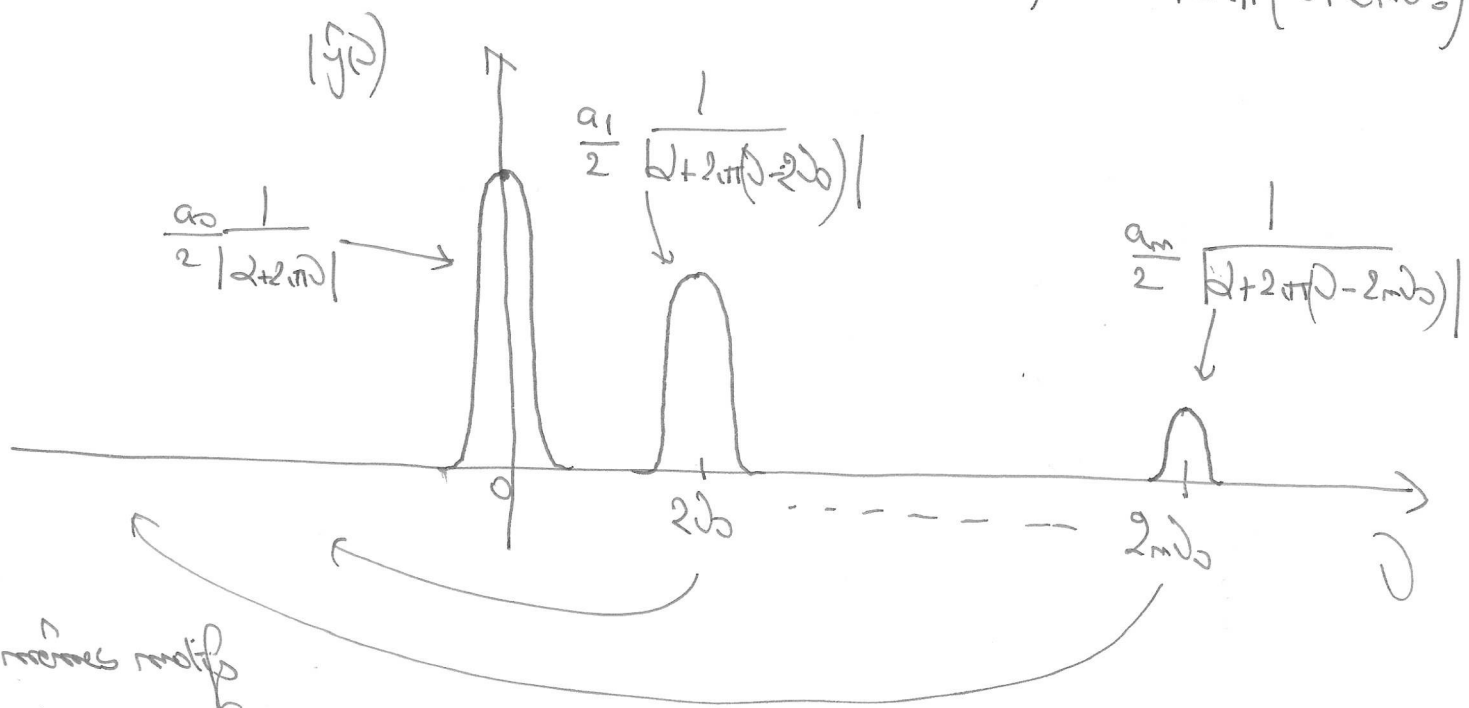
$$\sin \frac{\pi}{2}(2m-1) = \sin \left(-\frac{\pi}{2} + m\pi \right) = -(-1)^m$$

$$\Rightarrow a_m = \frac{2}{\pi} (-1)^m \left[\frac{1}{2m+1} - \frac{1}{2m-1} \right] = (-1)^{m+1} \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{4m^2 - 1}$$

$$y(t) = |r(t)| = e^{-\alpha t} |\cos 2\pi \omega_0 t| \mathcal{1}_{\mathbb{R}^+}(t)$$

$$y(t) = \frac{a_0}{2} e^{-\alpha t} \mathcal{1}_{\mathbb{R}^+}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\alpha t} \mathcal{1}_{\mathbb{R}^+}(t) \cos 4\pi n \omega_0 t$$

$$\hat{y}(\omega) = \frac{a_0}{2} \frac{1}{\omega + 2i\pi\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega + 2i\pi(\alpha - 2n\omega_0)} + \frac{1}{\omega + 2i\pi(\alpha + 2n\omega_0)} \right)$$



mêmes motifs pour $\omega < 0$ du fait de la parité de $\omega \rightarrow |\hat{y}(\omega)|$.

Si l'on filtre passe bas de signal $y(t)$ de sorte que la fonction de transfert du filtre $\hat{h}(\omega)$ soit à peu près nulle aux fréquences relativement supérieures à $\frac{\alpha}{2\pi}$, alors,

$$\hat{h}(\omega) \frac{1}{\omega + 2i\pi(\alpha - 2n\omega_0)} \approx 0 \quad \forall n \geq 1.$$

$$\hat{h}(\omega) \frac{1}{\omega + 2i\pi(\alpha + 2n\omega_0)} \approx 0$$

So on suppose de plus que $\hat{h}(\omega) \approx 1$ dans la bande passante de $e^{-\alpha t} \mathcal{1}_{\mathbb{R}^+}(t)$.

So $z(t)$ représente le signal de sortie du filtre, donc on a

(5)

$$\begin{aligned}
 \hat{z}(N) &= \hat{p}(N) \hat{y}(N) \approx \frac{a_0}{2} \hat{h}(N) \frac{1}{\omega + 2i\pi N} \\
 &+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{2} \left(\hat{h}(N) \frac{1}{\omega + 2i\pi(N - 2m\omega_0)} + \hat{h}(N) \frac{1}{\omega + 2i\pi(N + 2m\omega_0)} \right) \\
 &\approx \frac{a_0}{2} \frac{1}{\omega + 2i\pi N}
 \end{aligned}$$

Cela implique que $z(t) \approx \frac{a_0}{2} e^{-\alpha t} \mathcal{L}_{\mathbb{R}^+}(1t)$
 $= \frac{a_0}{\pi} e^{-\alpha t} \mathcal{L}_{\mathbb{R}^+}(1t)$

