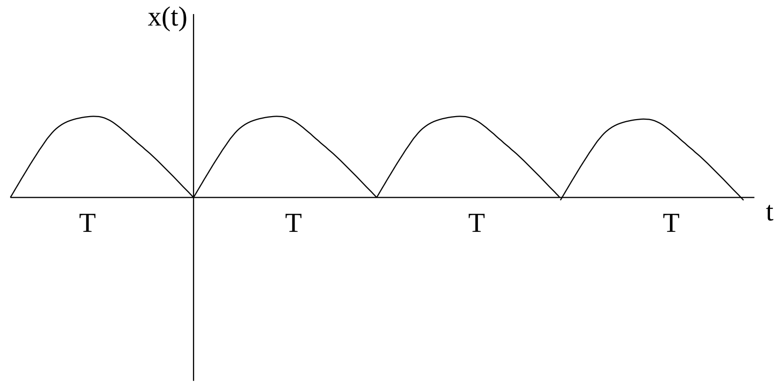
Série et Transformée de Fourier.

Série de Fourier I

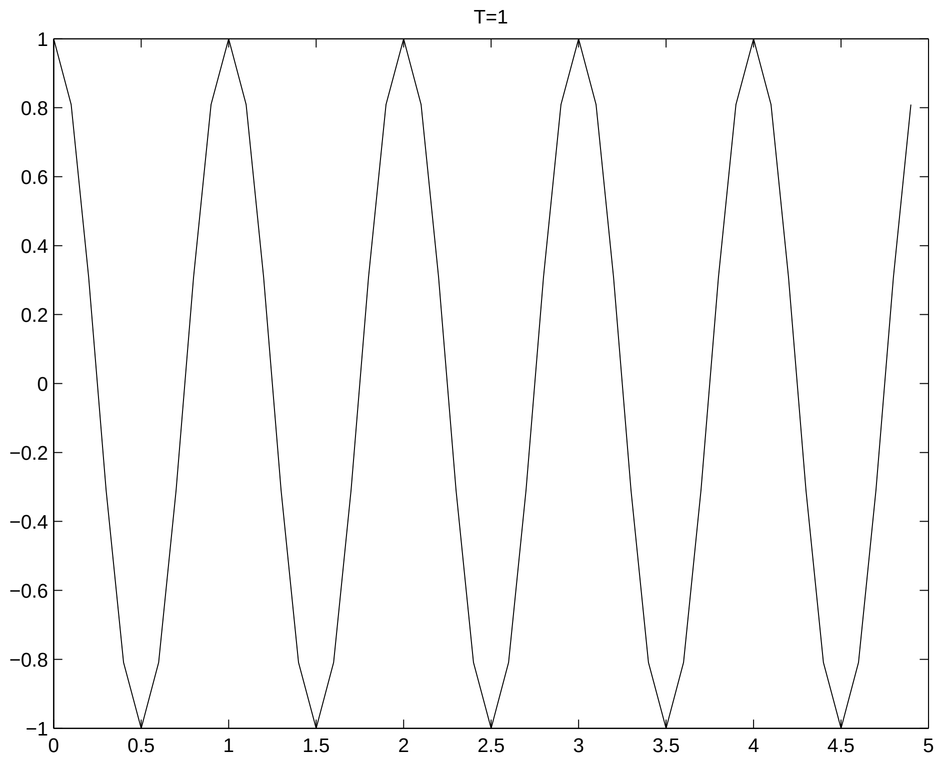
Fonction périodique. : $x(t+T) = x(t)$



Série de Fourier II

Exemple fondamental 1: Les sinusoides.

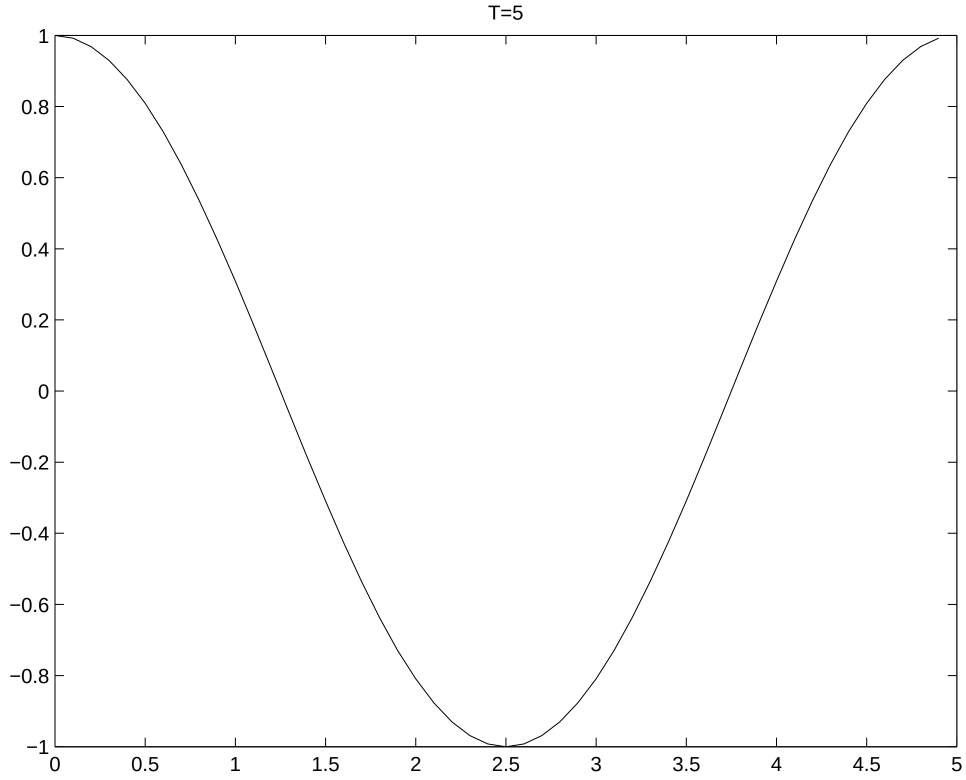
$$x(t) = C \cos(2\pi \frac{t}{T} + \phi)$$



Cas où $T = 1$.

Série de Fourier III

Cas où $T = 5$



Série de Fourier IV

$f_0 = \frac{1}{T}$: fréquence de la sinusoide = nombre de périodes par seconde.

f_0 petit $\Longleftrightarrow$ T grand $\Longleftrightarrow$ $x(t)$ varie lentement

f_0 grand $\Longleftrightarrow$ T petit $\Longleftrightarrow$ $x(t)$ varie vite

En audio, sons fondamentaux = sinusoides. Chaque note correspond à une fréquence.

f_0 petit $\Longleftrightarrow$ son grave, f_0 grand $\Longleftrightarrow$ son aigu

Série de Fourier V

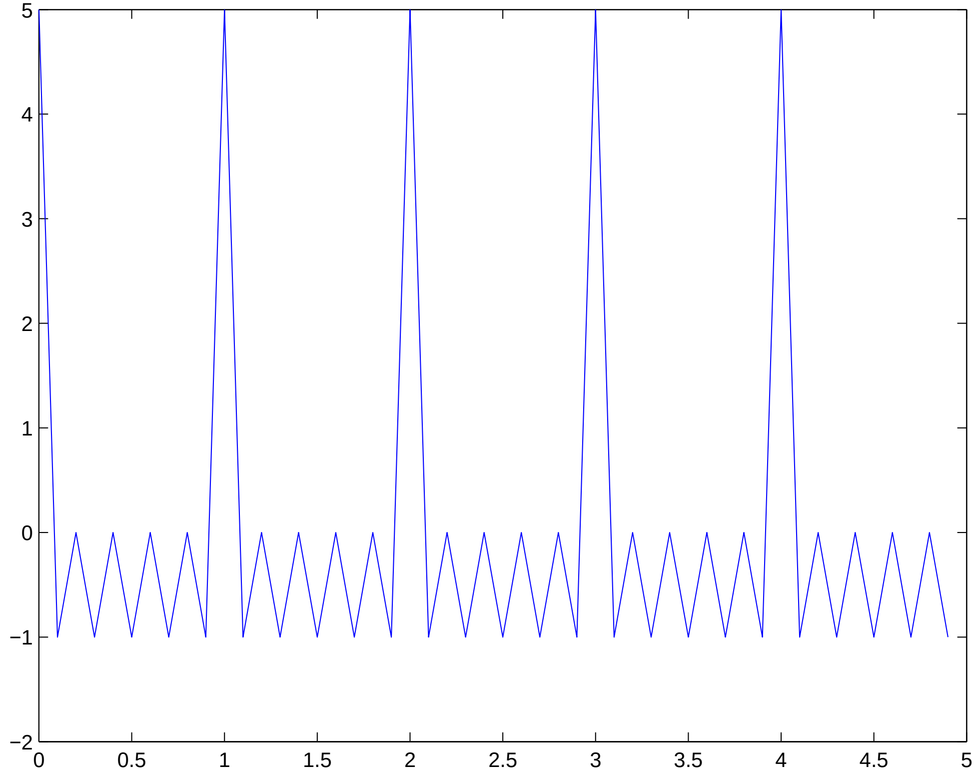
Exemple fondamental 2 : les sommes de sinusoides de fréquences harmoniques.

$x(t) = C_0 + C_1 \cos(2\pi \frac{t}{T} + \phi_1) + C_2 \cos(2\pi \frac{t}{T/2} + \phi_2) + \ldots C_N \cos(2\pi \frac{t}{T/N} + \phi_N)$

Si $f_0 = \frac{1}{T}$:

$x(t) = C_0 + C_1 \cos(2\pi f_0 t + \phi_1) + C_2 \cos(2\pi 2 f_0 t + \phi_2) + \ldots C_N \cos(2\pi N f_0 t + \phi_N)$.

Somme de 5 sinusoides de fréquences 1,2,3,4,5 et de la constante 1.



Série de Fourier VI

Théorème fondamental.

Soit $x(t)$ une fonction périodique de période T. Alors, sous réserve de qq conditions :

$x(t) = C_0 + C_1 \cos(2\pi f_0 t + \phi_1) + C_2 \cos(2\pi 2 f_0 t + \phi_2) + \ldots C_N \cos(2\pi N f_0 t + \phi_N) + \ldots$

où $f_0 = \frac{1}{T}$.

Autres formes du résultat. :

$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2\pi n f_0 t + b_n \sin 2\pi n f_0 t$

$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} X_n e^{2i\pi n f_0 t}$

f_0 est appelée la fréquence fondamentale, et les multiples de f_0 les harmoniques.

En pratique, seul un nombre fini de coefficients sont numériquement non nuls.
Connaitre la valeur de ces coefficients donne des indications sur la nature du signal.

Série de Fourier VII

Relations entre les diverses formes.

- Lien $X \rightarrow (C, \phi)$

  $X_0 = C_0,\ X_n = \frac{C_n e^{i\phi_n}}{2}$ si $n \geq 1,\ X_{-n} = X_n^* = \frac{C_n e^{-i\phi_n}}{2}$ si $n \geq 1$

- Lien $X \rightarrow (a, b)$

  $X_0 = \frac{a_0}{2},\ X_n = \frac{a_n + ib_n}{2}$ si $n \geq 1,\ X_-n = \frac{a_n - ib_n}{2}$ si $n \geq 1$.

Série de Fourier VIII

Valeurs des coefficients X_n en fonction de $x(t)$.

- Valeur de X_n

  $X_n = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} x(t) e^{-2i\pi n \frac{t}{T}} dt$

- Valeurs des coefficients a_n et b_n en fonction de $x(t)$

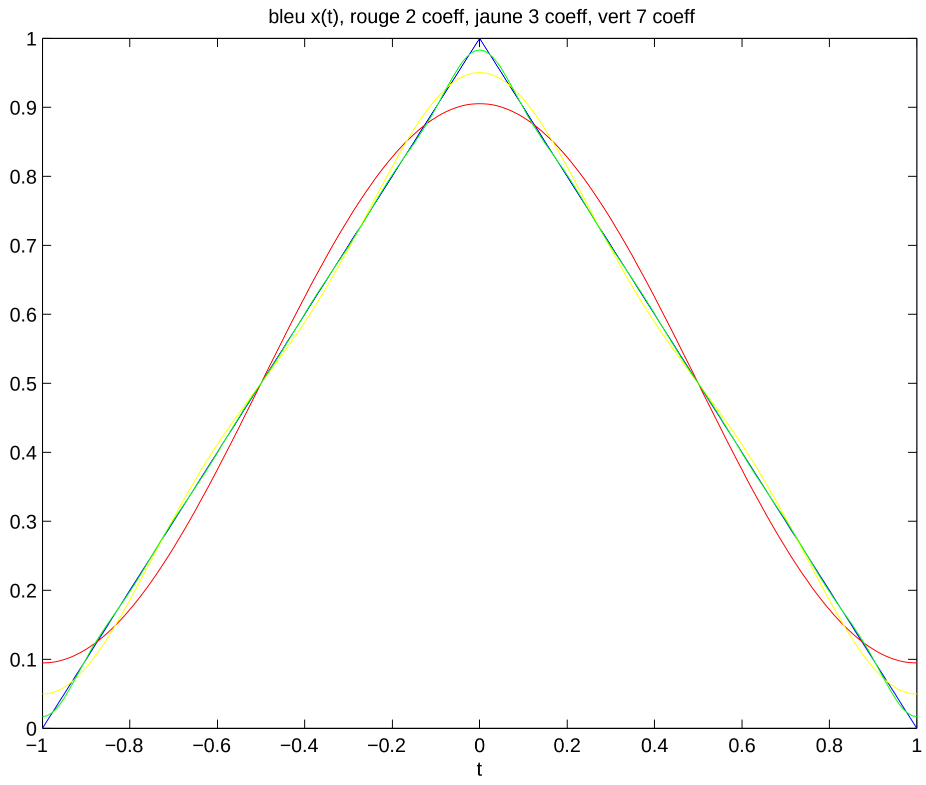
  $a_n = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} x(t) \cos(2\pi n \frac{t}{T}) dt$ et $b_n = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} x(t) \sin(2\pi n \frac{t}{T}) dt$

Série de Fourier IX

Petit exemple numérique.

$x(t) = 1 - |t|$ sur $[-1, 1]$, périodique de période 2.

$$x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(2n+1)^2} \cos[(2n+1)\pi t]$$



Transformée de Fourier I

Définition.

Soit $x(t)$ un signal à temps continu. La transformée de Fourier de $x(t)$ est la fonction :

$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-2i\pi f t}dt.$

Exemples de conditions d'existence:

- $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|dt < \infty$ ou
- $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$: signal d'énergie finie.

Propriété immédiate : $X(-f) = X(f)^*$, implique $|X(-f)| = |X(f)|$.

Transformée de Fourier II

Théorème fondamental.

Si $x(t)$ est d'énergie finie, alors

$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$: Identité de Parseval.

$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{2i\pi f t} df$.

Interprétation : $X(f) = \frac{C(f)}{2} e^{i\phi(f)}$.

$x(t) = \int_{0}^{\infty} C(f) \cos(2\pi f t + \phi(f)) df$.

$x(t)$ est une superposition continue de sinusoides dont les fréquences balayent $[0, \infty]$.

Transformée de Fourier III

En pratique, $|X(f)|$ numériquement non nul si $f \in [B_1, B_2] \cup [-B_2, -B_1]$.

$x(t) = \int_{B_1}^{B_2} C(f) \cos(2\pi f t + \phi(f)) df$.

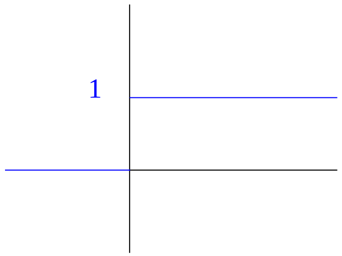
$[B_1, B_2]$ est appelée bande passante du signal $x(t)$.

Exemples.

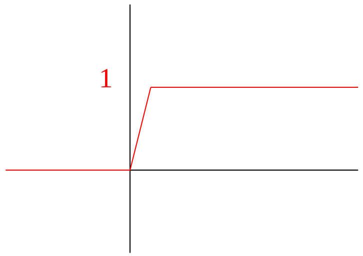
- Signal de parole : [50Hz, 4KHz]
- Musique : [50Hz, 25KHz]
- France Info : [105.5 MHz - 250 KHz, 105.5 MHz + 250 KHz]

Transformée de Fourier IV

Introduction de l'impulsion de Dirac.



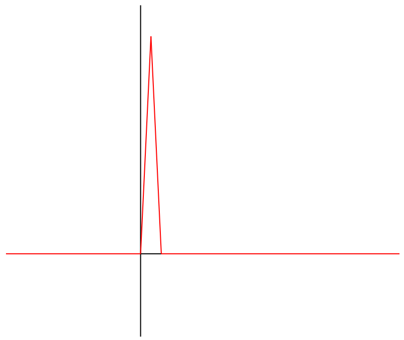
Y(f) échelon unité



Z(f) approximation de l'échelon

$\delta(f) = 0$ si $f \neq 0$

$\delta(f) = +\infty$ si $f = 0$



Z'(f) dérivée de l'approximant

Transformée de Fourier V

Propriétés de l'impulsion de Dirac $\delta(f)$.

- $\int \delta(f) df = 1$, $\int \delta(f - f_0) df = 1$
- $\phi(f)\delta(f) = \phi(0)\delta(f)$, $\phi(f)\delta(f - f_0) = \phi(f_0)\delta(f)$

Conséquence.

$\int \phi(f)\delta(f) df = \phi(0)$ et $\int \phi(f)\delta(f - f_0) df = \phi(f_0)$

Transformée de Fourier VI

Transformée de Fourier des sinusoides.

$e^{2i\pi f_0 t} = \int \delta(f - f_0) e^{2i\pi f t} dt$

- TF de $e^{2i\pi f_0 t}$: $\delta(f - f_0)$
- TF de $\cos 2\pi f_0 t$: $\frac{\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)}{2}$
- TF de $\sin 2\pi f_0 t$: $\frac{\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)}{2i}$

Signification physique Les signaux modélisables par des sinusoides ont des TF ressemblant à des impulsions en f_0 et $-f_0$.

Transformée de Fourier VII

Quelques propriétés de la transformée de Fourier.

$x(t)$ et $X(f)$ sa transformée de Fourier

- TF de $x(t-\tau) = X(f)e^{-2i\pi f\tau}$
- TF de $x(t)e^{2i\pi f_0 t} = X(f-f_0)$
- TF de $x(t)\cos(2\pi f_0 t) = \frac{X(f-f_0)+X(f+f_0)}{2}$
- TF de $x'(t) = (2i\pi f)X(f)$, TF de $x^{(n)}(t) = (2i\pi f)^n X(f)$

Transformée de Fourier VIII

Interprétation de la propriété TF de $x(t)\cos(2\pi f_0 t) = \frac{X(f-f_0)+X(f+f_0)}{2}$