Filtrage des signaux à temps continu.

Produit de convolution

Définition.

$x(t)$ et $y(t)$ deux signaux. Le produit de convolution $x * y$ est le signal $z(t) = (x * y)(t)$ donné par

$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s)y(t-s)ds$

Propriétés immédiates.

- $x * y = y * x$
- $(x * y) * z = x * (y * z)$

Produit de convolution II

Propriétés essentielles.

- $x * \delta = \delta * x = x$
- Si $z(t) = (x * y)(t)$, alors $Z(f) = X(f)Y(f)$

La transformée de Fourier transforme le produit de convolution en produit simple.

Définition d'un filtre.

Dispositif physique tel que:

$y(t) = (h * x)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(s)x(t-s)ds$

$x(t)$ entrée du filtre, $y(t)$ sortie du filtre.

Réponse impulsionnelle et fonction de transfert.

La fonction $h(t)$ est appelée réponse impulsionnelle du filtre.

$h(t)$ est la sortie si $x(t) = \delta(t)$.

Filtre réalisable physiquement $\Rightarrow h(t) = 0$ pour $t < 0$.

Fonction de transfert définie par $H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-2i\pi f t} dt$.

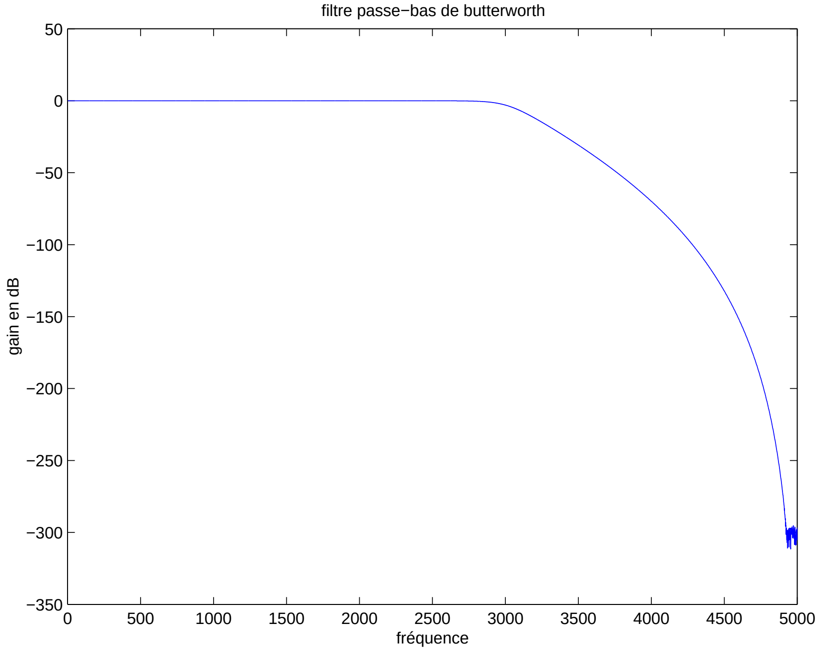
$H(f)$ transformée de Fourier de $h(t)$.

Relation entrée/sortie dans le domaine de Fourier : $Y(f) = H(f)X(f)$

Un filtre peut supprimer des bandes de fréquences contribuant au signal $x(t)$.

Filtres passe-bas et passe-bandes I

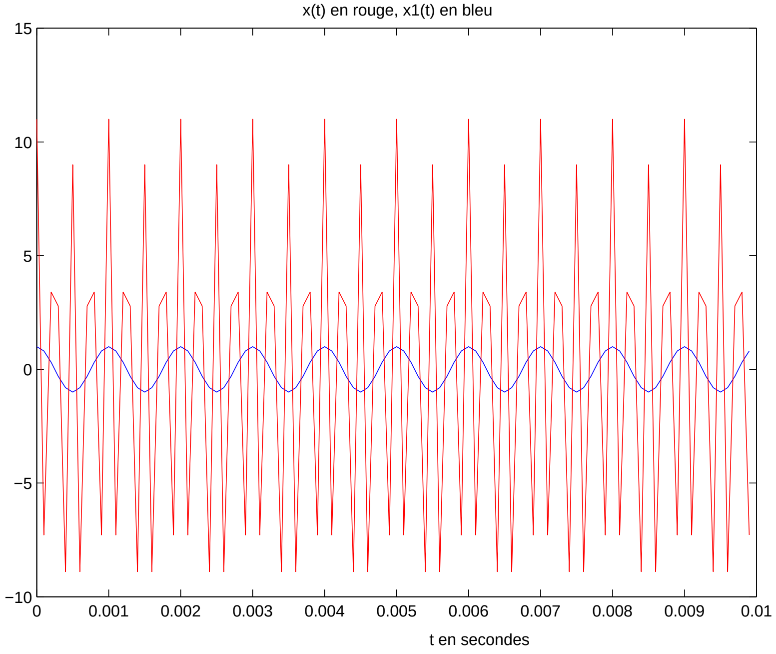
Filtre passe-bande, allure de la fonction de transfert.



Filtres passe-bas et passe-bandes II

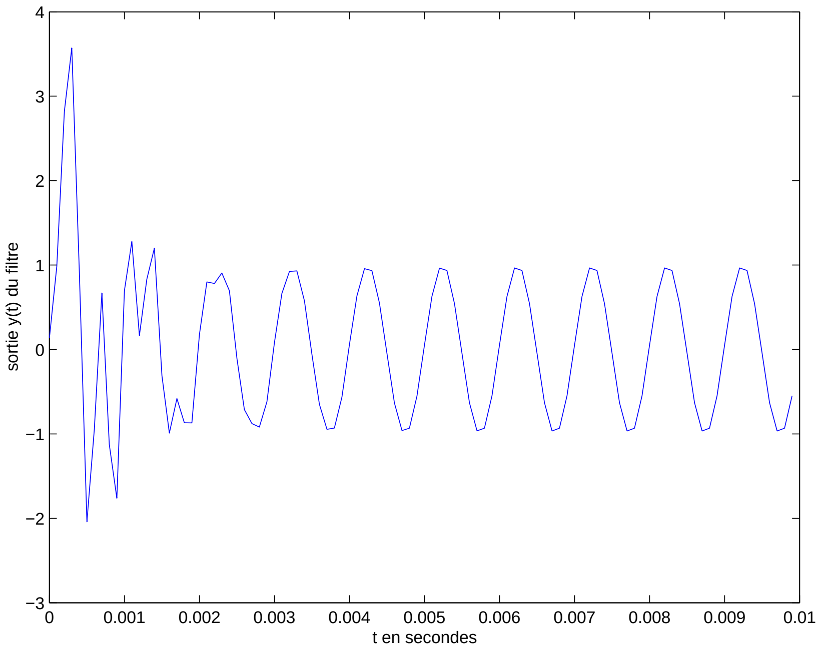
Visualisation de l'effet du filtre.

$$x_1(t) = \cos 2\pi f_1 t,\ x(t) = x_1(t) + 10\cos 2\pi f_2 t \text{ avec } f_1 = 1KHz,\ f_2 = 4KHz.$$



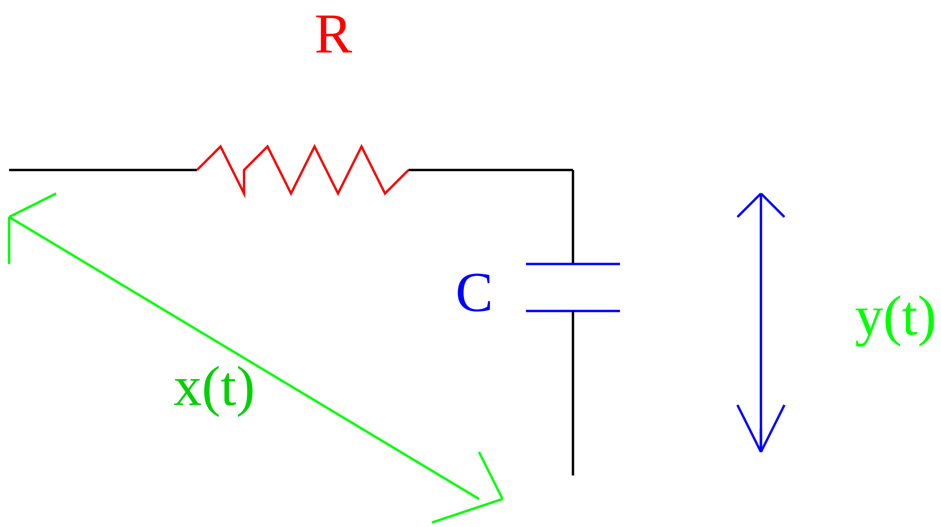
Filtres passe-bas et passe-bandes III

Visualisation de l'effet du filtre.



Comment réalise-t-on des filtres ? I

Exemple.



$x(t) = RCy'(t) + y(t)$.

$X(f) = (2i\pi fRC + 1)Y(f)$ d'où

$Y(f) = H(f)X(f)$ avec $H(f) = \frac{1}{1+(2i\pi fRC}$.

Comment réalise-t-on des filtres ? II

Cas plus général.

Relation d'entrée / sortie du type :

$a_0 y(t) + a_1 y^{'}(t) + \ldots a_p y^{(p)}(t) = b_0 x(t) + b_1 x^{'}(t) + \ldots b_q x^{(q)}(t)$

Prise de la transformée de Fourier des 2 membres:

$(a_0 + (2i\pi f)a_1 + \ldots (2i\pi f)^p a_p) Y(f) = (b_0 + (2i\pi f)b_1 + \ldots (2i\pi f)^q b_q) X(f)$

$Y(f) = H(f)X(f)$ avec

$H(f) = \frac{B(2i\pi f)}{A(2i\pi f)} = \frac{(b_0 + (2i\pi f)b_1 + \ldots + (2i\pi f)^{(q)} b_q)}{(a_0 + (2i\pi f)a_1 + \ldots (2i\pi f)^{(p)} a_p)}.$

Stabilité des filtres I

Un filtre est stable si toute entrée bornée produit une sortie bornée

INDISPENSABLE EN PRATIQUE

Critères de stabilité.

- Cas général : $\int_0^\infty |h(t)| dt < \infty$
- Filtres de fonction de transfert rationnel : les zéros de $A(p)$ sont de parties réelles strictement négatives.

Exemple :

- $y(t) + ay^{'}(t) = x(t)$ avec $a > 0$ stable
- $y(t) - ay^{'}(t) = x(t)$ avec $a > 0$ instable