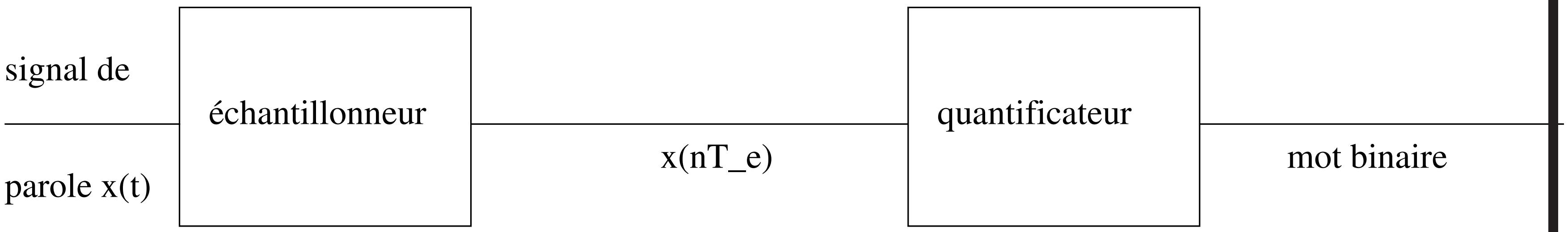
Echantillonnage et signaux à temps discret.

Motivation

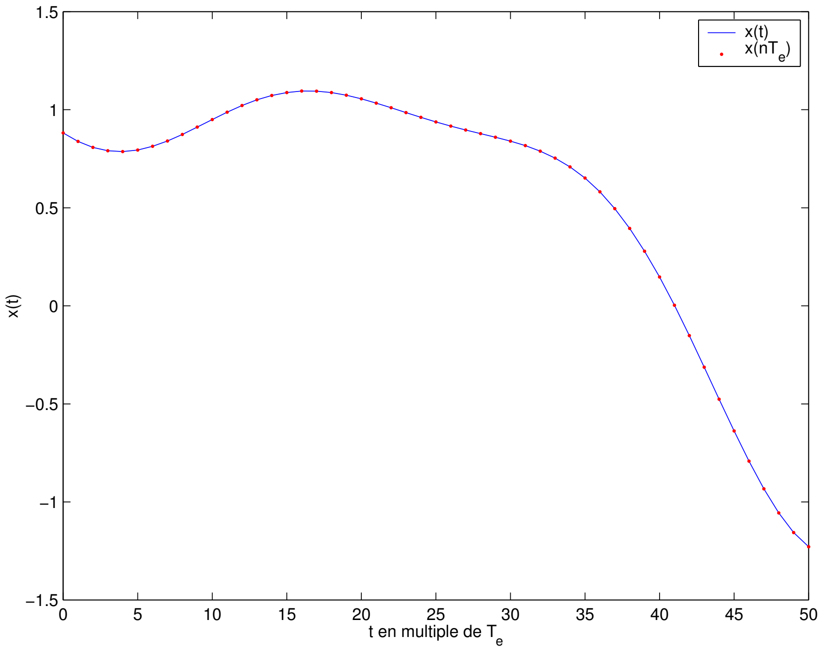


Questions.

- Comment choisir T_e ?
- Comment reconsituer le signal $x(t)$ à partir des bits qui le représentent ?

T_e période d'échantillonnage, $F_e = \frac{1}{T_e}$ fréquence d'échantillonnage.

Reformulation.



Peut-on reconstituer de façon unique la courbe bleue à partir des points rouges ?

Théorème de Shannon.

Soit $x(t)$ un signal de bande passante $[-B, B]$. Alors, si $T_e < \frac{1}{2B} \Longleftrightarrow B < \frac{F_e}{2}$, la fonction $x(t)$ est définie de façon unique par la suite $(x(nT_e))_{n \in \mathbb{Z}}$. De plus,

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(nT_e) \frac{\sin(\frac{\pi(t-nT_e)}{T_e})}{\frac{\pi(t-nT_e)}{T_e}}$$

$x(t)$ est la seule courbe suffisement douce passant par les points $(x(nT_e))_{n \in \mathbb{Z}}$.

Preuve du théorème de Shannon I.

Basée sur la formule sommatoire de Poisson. Formule fondamentale qui possède son intérêt propre.

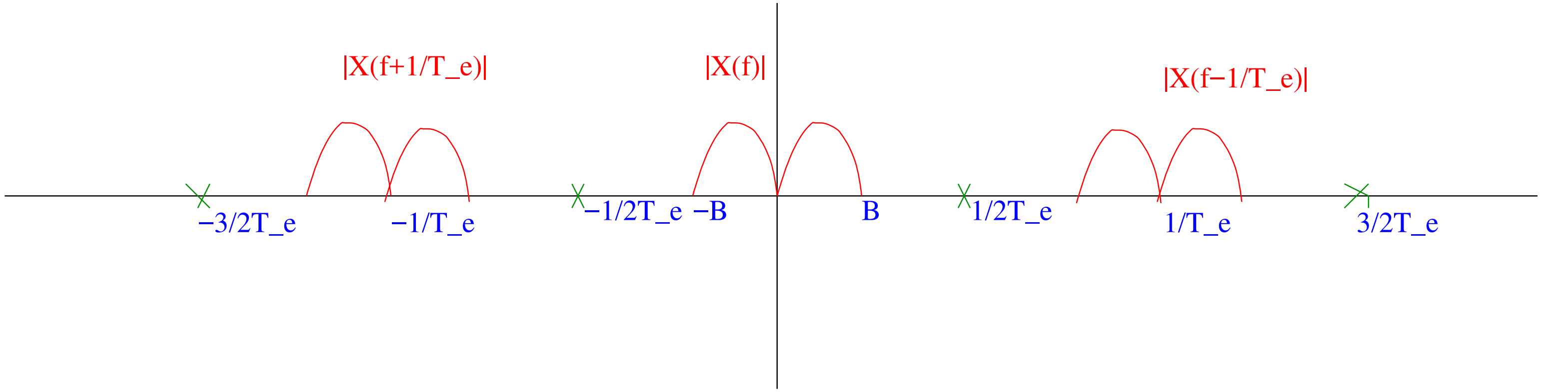
Soit $x(t)$ une fonction et $X(f)$ sa TF. Alors:

$$T_e \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(nT_e) e^{-2i\pi n f T_e} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} X(f - \frac{k}{T_e})$$

Preuve du théorème de Shannon II.

Soit $Y(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} X(f - \frac{k}{T_e}) = T_e \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(nT_e) e^{-2i\pi n f T_e}$

Si $T_e < \frac{1}{2B} \Longleftrightarrow B < \frac{1}{2T_e}$.



$X(f) = Y(f)$ sur $[-\frac{1}{2T_e}, \frac{1}{2T_e}]$.

$x(t) = \int_{-B}^{B} X(f) e^{2i\pi f t} df = \int_{-\frac{1}{2T_e}}^{\frac{1}{2T_e}} Y(f) e^{2i\pi f t} df$.

On remplace $Y(f)$ par son expression $\Rightarrow$ formule d'interpolation de Shannon.

Application aux convertisseurs numériques analogiques I.

Comment générer concrètement le signal $x(t)$ à partir de la suite $(x(nT_e))_{n\in\mathbb{Z}}$.

Soit $h(t)$ une fonction telle que

$$\begin{aligned} H(f) &= 1 \text{ si } f \in [-B, B] \\ &= 0 \text{ si } f \notin [-\tfrac{1}{2T_e}, \tfrac{1}{2T_e}] \end{aligned}$$

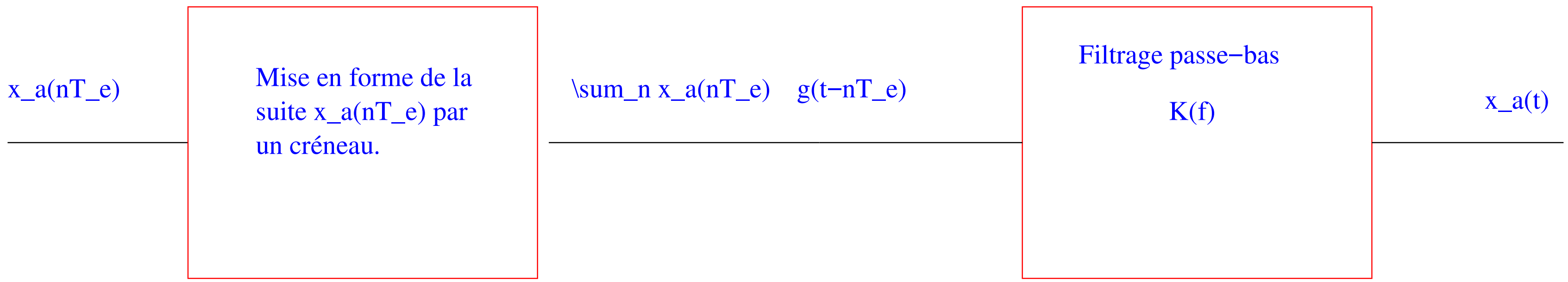
Alors :

$$x(t) = T_e \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(nT_e)h(t-nT_e)$$

Si $h(t) = \frac{sin(\pi t/T)}{\pi t}$, on retrouve la formule de Shannon.

Application aux convertisseurs numériques analogiques II.

Principe général.



K(f) G(f) = 1 sur [−B, B]

K(f) = 0 hors de [−1/2T_e,1/2T_e]

Signaux à temps discrets. Généralités

Signal à temps discret = suite $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

Exemple typique : $x_n = x_a(nT_e)$ où $x_a(t)$ est un signal à temps continu et T_e sa période d'échantillonnage.

Signaux à temps discrets. Transformée de Fourier, I

$X(f)$ la transformée de Fourier de $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est la fonction définie sur $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ par:

$$X(f)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n e^{-2i\pi n f}$$

La variable f est appelée fréquence normalisée.

Signaux à temps discrets. Transformée de Fourier, II

Justification de l'expression fréquence normalisée.

$x_n = x_a(nT_e)$ où $x_a(t)$ est de bande passante $[-B, B]$ et $B < \frac{1}{2T_e}$.

Grâce à la formule de Poisson :

$$X_a(\nu) = T_e \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{-2i\pi n \nu T_e} \text{ si } \nu \in [-\frac{1}{2T_e}, \frac{1}{2T_e}]$$

On pose alors $f = \nu T_e = \frac{\nu}{F_e}$ qui appartient à $[-1/2, 1/2]$:

$$X(f) = F_e X_a(f F_e) \text{ si } f \in [-1/2, 1/2]$$

Aux renormalisations près, TF du signal à temps discret $(x_a(nT_e))_{n \in \mathbb{Z}}$ = TF du signal à temps continu $x_a(t)$.

Quelques propriétés de la TF.

Philosophie : mêmes types de propriétés que la TF des signaux à temps continu.

$X(f) =$ TF de $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$

- $x_n = \int_{-1/2}^{1/2} X(f) e^{2i\pi n f} df$ pour tout n
- TF de $(x_{n-n_0})_{n\in\mathbb{Z}} = e^{-2i\pi n_0 f} X(f)$
- TF de $e^{2i\pi n f_0} = \delta(f - f_0)$
- Si x est réel, $X(-f) = X(f)^*$
- Si x est réel, $x_n = \int_{-1/2}^{1/2} X(f) e^{2i\pi n f} df = \int_0^{1/2} C(f) \cos(2\pi n f + \phi(f)) df$ avec $X(f) = \frac{C(f)}{2} e^{i\phi(f)}$.
- $X^{'}(f) = -2i\pi \sum_n n x_n e^{-2i\pi n f} = -2i\pi$ TF signal $(n x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$

Filtrage des signaux à temps discret I

Produit de convolution de signaux à temps discret x et y : $z = x * y$:

$$z_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k y_{n-k}$$

Mêmes propriétés que dans le cas des signaux à temps continus: en particulier;

$$\text{TF de } (x * y)_n = X(f)Y(f)$$

On a aussi

$$\text{TF de } x_n y_n = (X * Y)(f)$$

Filtrage des signaux à temps discret II

Filtre = dispositif tel que :

$y_n = (h * x)_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k x_{n-k}$

x est l'entrée du filtre, y la sortie du filtre, et h est sa réponse impulsionnelle.

- Filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF) si seuls un nombre fini de h_k sont non nuls
- Filtre à réponse impulsionnelle infinie (RII) dans le cas contraire

Filtres le plus souvent causaux, $h_k = 0, k < 0$, $y_n = (h * x)_n = \sum_{k=0}^{+\infty} h_k x_{n-k}$

Filtrage des signaux à temps discret III

$H(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} h_k e^{-2i\pi k f}$ est la fonction de transfert.

Relation d'entrée / sortie dans le domaine fréquentiel :

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

Même utilisation que les filtres à temps continu : couper des bandes de fréquences.

Filtrage des signaux causaux.

Filtre causal, i.e. la réponse impulsionnelle h est un signal causal, i.e. $h_n = 0$ si $n < 0$.

On met à l'entrée du filtre un signal causal u, et on appelle y le signal de sortie qui, par définition est le produit de convolution de u avec h. y est causal et est donné par

$$y_n = (h * u)_n = \sum_{k=0}^{n} h_k u_{n-k},\ n \geq 0 \tag{1}$$

En terme de transformée de Fourier $Y(f) = H(f)U(f)$ où $H(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} h_k e^{-2i\pi k f}$ est la fonction de transfert du filtre.

Question importante: pour calculer y_n à chaque instant n via la formule (1), il semble qu'il faille en général effectuer n opérations. Ceci n'est évidemment pas envisageable. C'est la raison pour laquelle on ne considère en pratique que des filtres pour lesquels on peut calculer y_n à chaque instant n en faisant un nombre d'opérations indépendant de n. Ces filtres sont ceux dont la fonction de transfert $H(f)$ est une fraction rationnelle de la variable $e^{-2i\pi f}$.

Filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF)

Ce sont les filtres pour lesquels tous les coefficients $(h_k)_{k \geq 0}$ au delà d'un certain entier K sont nuls: $h_k = 0$ si $k > K$.

Si $n \geq K$, l'équation (1) se met sous la forme:

$$y_n = (h * u)_n = \sum_{k=0}^{K} h_k u_{n-k},\ n \geq 0 \tag{2}$$

Le calcul de y_n nécessite donc $(K+1)$ opérations pour tout $n \geq K$. La fonction de transfert du filtre $H(f)$ est le polynôme de la variable $e^{-2i\pi f}$ donné par $H(f) = \sum_{k=0}^{K} h_k e^{-2i\pi k f}$ qui est bien une fraction rationnelle de $e^{-2i\pi f}$.

Filtres récursifs à réponse impulsionnelle infinie (RII)

Exemple simple: filtre d'ordre 1

$(u_n)_{n \geq 0}$ étant le signal causal d'entrée, on définit la sortie $(y_n)_{n \geq 0}$ comme le signal causal vérifiant pour tout instant $n \geq 0$ l'équation

$$y_n - a y_{n-1} = u_n \tag{3}$$

Comment calculer y_n pour chaque n ?

- Initialisation: pour $n = 0$, (3) donne $y_0 = u_0$ car $y_{-1} = 0$ du fait de la causalité de y.
- Pour $n = 1$, (3) donne $y_1 - a y_0 = u_1$, d'où $y_1 = a y_0 + u_1$.
- Pour $n = 2$, même chose, $y_2 = a y_1 + u_2$.
- $y_0, \ldots, y_{n-1}$ ayant été préalablement calculés, on évalue y_n par $y_n = a y_{n-1} + u_n$.
- Et on continue

A chaque instant n, le calcul de y_n nécessite donc de mettre en oeuvre 1 multiplication (celle de y_{n-1} par a) et une accumulation (ajouter u_n à ay_{n-1}). On convient souvent de considérer qu'une multiplication et une accumulation font une opération. On parle d'implémentation récursive.

En conclusion, il faut 1 opération pour calculer y_n pour chaque valeur de n.

Pourtant, nous allons voir dans le transparent suivant que la réponse impulsionnelle du filtre transformant u en y est la suite causale $h_k = a^k$ pour tout k. Dans ces conditions,

$y_n = \sum_{k=0}^{n} a^k u_{n-k}$

Si on calculait y_n directement comme cela, il faudrait à chaque instant n faire n opérations. L'implémentation récursive rend donc possible la mise en oeuvre pratique de ce filtre d'ordre 1.

Calcul de la fonction de transfert et de la réponse impulsionnelle

Comme $y_n = ay_{n-1} + u_n$ pour tout $n \geq 0$, la transformée de Fourier du signal de gauche est égale à la transformée de Fourier du terme de droite. En utilisant la propriété que la transformée de Fourier du signal retardé d'une unité y_{n-1} est égale à $e^{-2i\pi f}Y(f)$, on obtient que $Y(f) = ae^{-2i\pi f}Y(f) + U(f)$ c'est-à-dire

$$Y(f) = \frac{1}{1 - ae^{-2i\pi f}} U(f) \tag{4}$$

On en déduit que

$$H(f) = \frac{1}{1 - ae^{-2i\pi f}}$$

Pour retrouver la réponse impulsionnelle, il faut développer $H(f)$ sous la forme $H(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} h_k e^{-2ik\pi f}$. Ici, il est clair que

$\frac{1}{1-ae^{-2i\pi f}} = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k e^{-2ik\pi f}$ si $|ae^{-2i\pi f}| < 1$, c'est-à-dire si $|a| < 1$.

Par conséquent, $h_k = a^k$ pour tout $k \geq 0$ si $|a| < 1$.

Cas général

La sortie $(y_n)_{n\geq 0}$ est définie comme la suite causale vérifiant l'équation récursive $y_n + \sum_{k=1}^{p} a_k y_{n-k} = \sum_{l=0}^{q} b_l u_{n-l}$ Comment calculer y_n pour tout n ?

- Initialisation $y_0 = b_0 u_0$
- $y_1, \ldots, y_{n-1}$ ayant été calculé on évalue y_n par

$$y_n = -\left(\sum_{k=1}^{p} a_k y_{n-k}\right) + \sum_{l=0}^{q} b_l u_{n-l}$$

- La mise en oeuvre du filtre nécessite donc $p + q + 1$ opérations

Fonction de transfert

On écrit que les transformées de Fourier des signaux $(y_n + \sum_{k=1}^{p} a_k y_{n-k})_{n\geq 0}$ et $(\sum_{l=0}^{q} b_l u_{n-l})_{n\geq 0}$ coïncident.

On obtient donc

$$Y(f) + \sum_{k=1}^{p} a_k e^{-2ik\pi f} Y(f) = \sum_{l=0}^{q} b_l e^{-2il\pi f} U(f) \tag{5}$$

ce qui donne

$$Y(f) = H(f)U(f)$$

avec

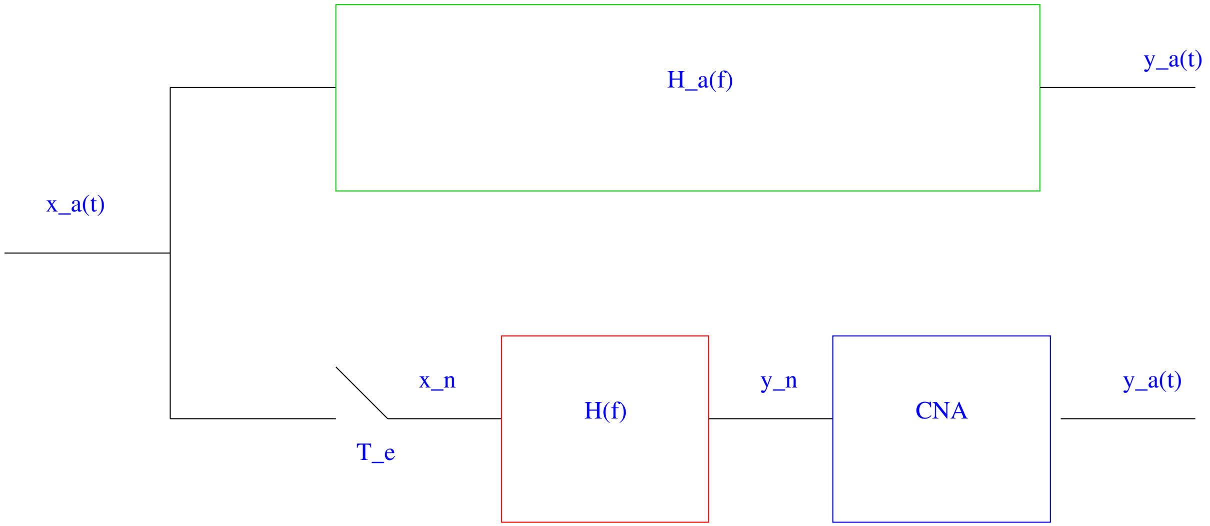
$$H(f) = \frac{\sum_{l=0}^{q} b_l e^{-2il\pi f}}{1 + \sum_{k=1}^{p} a_k e^{-2ik\pi f}}$$

$H(f)$ est bien une fraction rationnelle de $e^{-2i\pi f}$. En conclusion:

Les filtres que l'on implémente en pratique sont ceux dont la fonction de transfert $H(f)$ est une fraction rationnelle de $e^{-2i\pi f}$.

Exemple d'application du filtrage numérique I.

Implantation numérique d'un filtrage analogique.



Exemple d'application du filtrage numérique II.

Difficile,cher, et peu flexible de mettre en oeuvre un filtre analogique $H_a(f)$

Le remplacer par :

- Echantillonnage à une fréquence suffisante, puis quantification de l'entrée
- Filtre numérique tel que $H(f) = H_a(fF_e)$
- Conversion numérique / analogique de la sortie

Justification

$y_n = y_a(nT_e)$ équivaut à dire que $Y_a(\nu) = T_e Y(\nu T_e)$ du fait de la formule de Poisson

Il suffit donc de vérifier que si $H(f) = H_a(fF_e)$, alors $Y_a(\nu) = T_e Y(\nu T_e)$ ou de façon équivalente que $Y(f) = F_e Y_a(fF_e)$

- On a $X_a(\nu) = T_e X(\nu T_e)$ ou encore $X(f) = F_e X_a(fF_e)$.
- $Y_a(\nu) = H_a(\nu) X_a(\nu)$ et $Y(f) = H(f) X(f)$
- $H(f) = H_a(fF_e)$ implique $Y(f) = H_a(fF_e) F_e X_a(fF_e) = F_e Y_a(fF_e)$