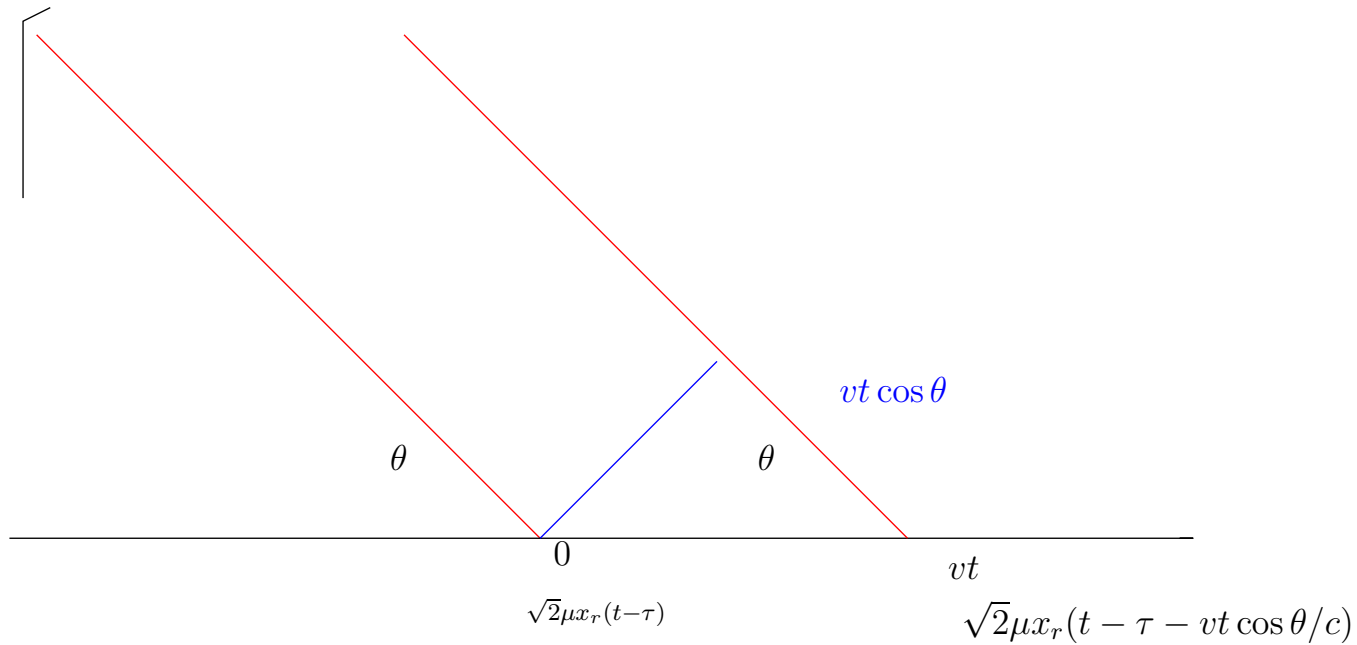


Mobilité, canaux de Rayleigh, diversité, modulations OFDM.

Prise en compte de la mobilité



$$\tau(t) = \tau + \frac{vt \cos \theta}{c}$$

Fréquence Doppler

On pose $\Delta f = \frac{f_0 v \cos \theta}{c} =$ fréquence Doppler

Valeur typique: $\theta = 0$, $f_0 = 1GHz$, $v = 100Km/h \simeq 30m/sec$, $\Delta f = 100Hz$

Lien avec l'effet Doppler: prendre $x(t) = 1$, $x_r(t) = \cos 2\pi f_0 t$

$$y_r(t) = \sqrt{2}\mu \cos(2\pi f_0(t - \tau(t))) = \sqrt{2}\mu \cos(2\pi(f_0 - \Delta f)t - 2\pi f_0 \tau)$$

La mobilité induit un changement de la fréquence au niveau du récepteur.

Le signal démodulé

Signal démodulé:

$$y(t) = \mu e^{-2i\pi f_0 \tau(t)} x(t - \tau(t)) + b(t) = \mu e^{-2i\pi f_0 \tau} e^{-2i\pi \Delta f t} x(t - \tau(t)) + b(t)$$

Simplification

Si $\frac{vt}{c} \ll T$ sur la durée de transmission du paquet, $x\left(t - \tau - \frac{vt \cos \theta}{c}\right) \simeq x(t - \tau)$

$v = 30m/sec$, condition vérifiée si $t < 10^7 T$. Valeurs usuelles de T de l'ordre de $1\mu sec$, condition toujours vérifiée.

$$y(t) = \mu e^{-2i\pi f_0 \tau} e^{-2i\pi \Delta f t} x(t - \tau) + b(t)$$

Sorties de filtre adapté

$$y_n = \frac{1}{T} \int y(t) g(t - \tau - nT) dt = \mu e^{-2i\pi f_0 \tau} \frac{1}{T} \int e^{-2i\pi \Delta f t} x(t - \tau) g(t - \tau - nT) dt + b_n.$$

On peut faire l'approximation (justification au prochain transparent):

$$\int e^{-2i\pi \Delta f t} x(t - \tau) g(t - \tau - nT) dt \simeq e^{-2i\pi \Delta f (\tau + nT)} \int x(t - \tau) g(t - \tau - nT) dt$$

Conclusion

$$y_n \simeq \mu e^{-2i\pi f_0 \tau} e^{-2i\pi \Delta f (\tau + nT)} a_n + b_n$$

Preuve de l'approximation

$$\int e^{-2i\pi\Delta f t} x(t - \tau) g(t - \tau - nT) dt = e^{-2i\pi\Delta f(\tau+nT)} \int e^{-2i\pi\Delta f(t-\tau-nT)} x(t - \tau) g(t - \tau - nT) dt$$

- En pratique, $g(u) \simeq 0$ si $|u| > pT$ pour un certain entier p (de l'ordre de $p = 3$ pour les filtres de mise en forme usuels). L'intégrale porte donc sur des t tels que $|t - \tau - nT| \leq pT$.
- L'approximation sera vérifiée dès que $e^{2i\pi\Delta f u} \neq 1$ si $|u| \leq pT$, i.e. si la phase maximale, $2\pi\Delta f pT$, est telle que $2\pi\Delta f pT \ll 1$
- Vrai pour les valeurs usuelles.

Conséquences sur la taille des paquets

Pour pouvoir estimer a_n à partir de y_n en utilisant les symboles pilotes, il faut que λ_n reste à peu près constant sur la durée du paquet.

$e^{-2i\pi n\Delta f T} \simeq 1$ pour tout $n = 1, \dots, N_p$ où N_p est la taille du paquet considéré.

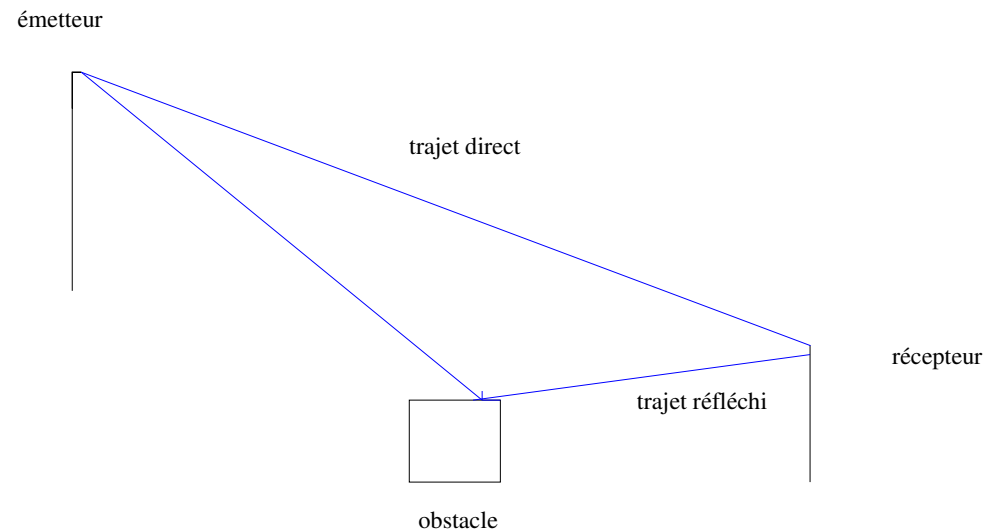
$N_p \Delta f T$ suffisamment petit

Exemple numérique: $T = 10^{-6}$, $\Delta f = 100 \text{ Hz}$

$10^{-4} N_p \ll 1$ ou de façon équivalente $N_p \ll 10^4$, i.e. N_p de l'ordre de la centaine.

Trajets multiples

En pratique, il existe des obstacles entre émetteur et récepteur.



$$y_r(t) = \sqrt{2}\mu_1 x_r(t - \tau_1) + \sqrt{2}\mu_2 x_r(t - \tau_2) + b_r(t)$$

$$y(t) = \mu_1 e^{-2i\pi f_0 \tau_1} x(t - \tau_1) + \mu_2 e^{-2i\pi f_0 \tau_2} x(t - \tau_2) + b(t)$$

Si $\tau_2 - \tau_1 \ll T$ i.e. $d_2 - d_1 \ll cT$, récepteur fixe.

Exemple $T = 3 \cdot 10^{-6}$, $d_2 - d_1 \ll 1$ km

Alors, $x(t - \tau_1) \simeq x(t - \tau_2) \simeq x(t - \tau)$

$$\begin{aligned} y(t) &= (\mu_1 e^{-2i\pi f_0 \tau_1} + \mu_2 e^{-2i\pi f_0 \tau_2}) x(t - \tau) + b(t) \\ &= \lambda x(t - \tau) + b(t), \lambda = \mu_1 e^{-2i\pi f_0 \tau_1} + \mu_2 e^{-2i\pi f_0 \tau_2} \end{aligned}$$

Sortie du filtre adapté à $\tau + nT$: $y_n = \lambda a_n + b_n$

Le module de λ peut prendre des valeurs entre $\mu_1 - \mu_2$ et $\mu_1 + \mu_2$ en fonction de la position du mobile

Conclusion: en présence de 2 trajets arrivant avec des temps de retard proche par rapport à T , il est possible qu'un évanouissement se produise si μ_1 et μ_2 sont proches.

Si $\tau_2 - \tau_1 \ll T$ i.e. $d_2 - d_1 \ll cT$, récepteur mobile.

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \left(\mu_1 e^{-2i\pi f_0 \tau_1(t)} + \mu_2 e^{-2i\pi f_0 \tau_2(t)} \right) x(t - \tau) + b(t) \\
 &= \lambda(t) x(t - \tau) + b(t), \lambda(t) = \mu_1 e^{-2i\pi f_0 \tau_1} e^{-2i\pi \Delta f_1 t} + \mu_2 e^{-2i\pi f_0 \tau_2} e^{-2i\pi \Delta f_2 t}
 \end{aligned}$$

Sortie du filtre adapté à $\tau + nT$: $y_n = \lambda_n a_n + b_n$

$$\lambda_n = \mu_1 e^{-2i\pi f_0 \tau_1} e^{-2i\pi \Delta f_1 (\tau_1 + nT)} + \mu_2 e^{-2i\pi f_0 \tau_2} e^{-2i\pi \Delta f_2 (\tau_2 + nT)}$$

Les (λ_n) varient entre $\mu_1 - \mu_2$ et $\mu_1 + \mu_2$

Conclusion: en présence de 2 trajets arrivant avec des temps de retard proche par rapport à T , il est possible qu'un évanouissement se produise si μ_1 et μ_2 sont proches.

Si $\tau_2 - \tau_1$ est de l'ordre de T , cas fixe

$$y(t) = \mu_1 e^{-2i\pi f_0 \tau_1} x(t - \tau_1) + \mu_2 e^{-2i\pi f_0 \tau_2} x(t - \tau_2) + b(t)$$

Sortie du filtre adapté échantillonné à l'instant $\tau + nT$ où $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$,

$$r(s) = \frac{1}{T} \int g(t + s)g(t)dt$$

$$\begin{aligned} y_n &= \mu_1 e^{-2i\pi f_0 \tau_1} \frac{1}{T} \int x(t - \tau_1)g(t - \tau - nT)dt + \mu_2 e^{-2i\pi f_0 \tau_2} \frac{1}{T} \int x(t - \tau_2)g(t - \tau - nT)dt + b_n \\ &= \sum_m a_m \left(\mu_1 e^{-2i\pi f_0 \tau_1} r((n - m)T + \tau - \tau_1) + \mu_2 e^{-2i\pi f_0 \tau_2} r((n - m)T + \tau - \tau_2) \right) + b_n \end{aligned}$$

On pose $h_l = \mu_1 e^{-2i\pi f_0 \tau_1} r(lT + \tau - \tau_1) + \mu_2 e^{-2i\pi f_0 \tau_2} r(lT + \tau - \tau_2)$

$$y_n = \sum_l h_l a_{n-l} + b_n$$

$r(s) \simeq 0$ si $|s| > pT$: le nombre de coefficients numériquement non nuls L de (h_l) est de l'ordre de $p + \frac{\tau_2 - \tau_1}{T}$. Présence d'interférence entre symboles en sortie du filtre adapté

Illustration.

$T = 20$, canal à 6 trajets de mêmes puissances et de temps de retards
 $0, T/2, T, 3T/2, 2T, 5T/2$

Sorties de filtre adapté.

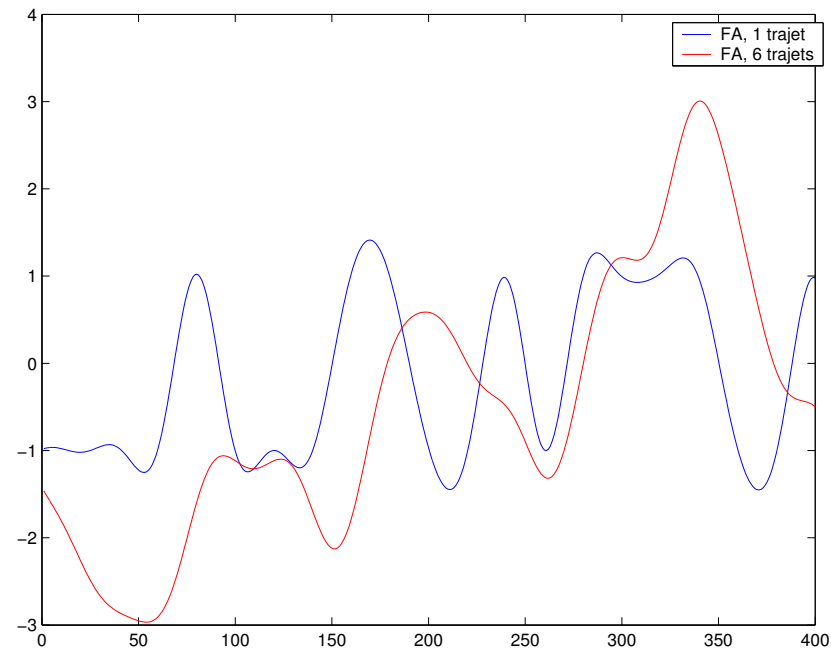


Diagramme de l'oeil, 1 trajet

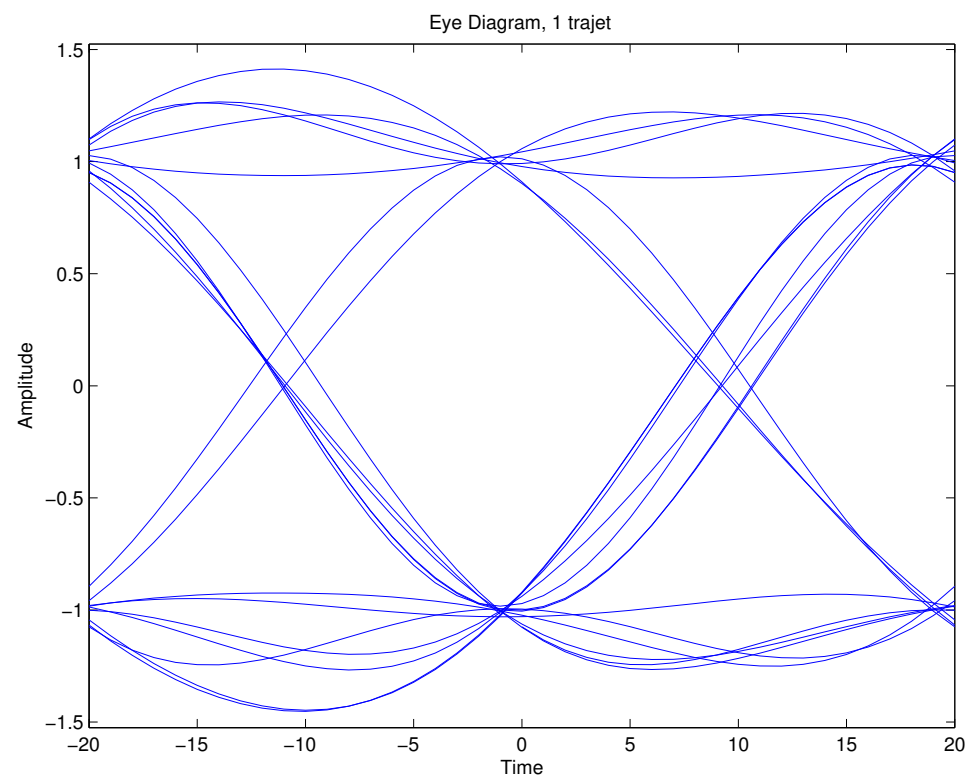
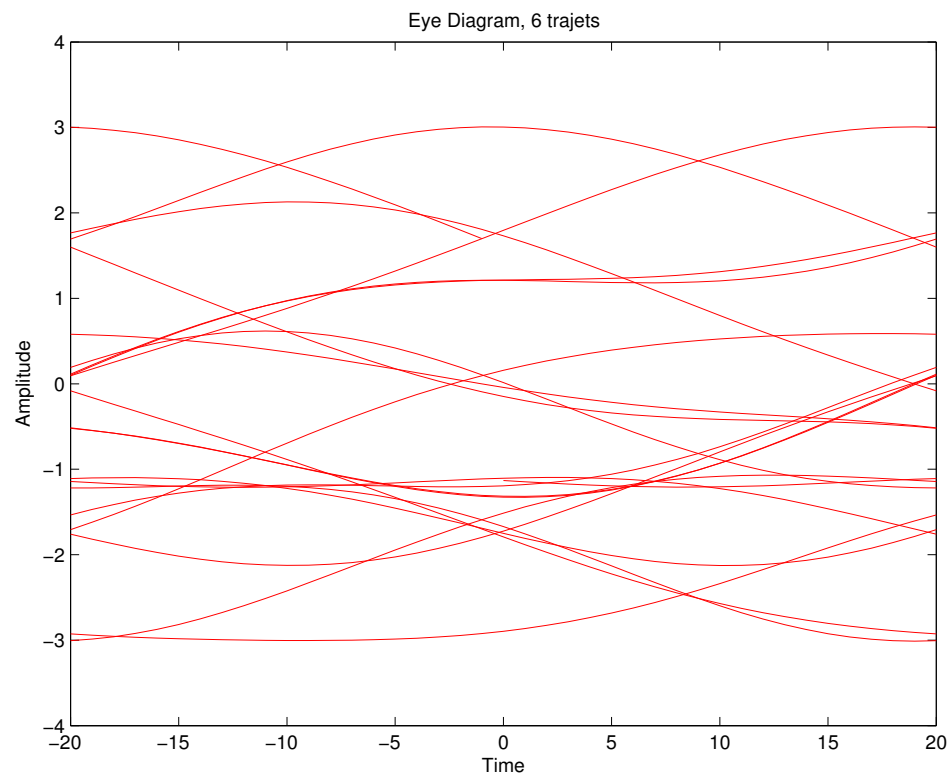


Diagramme de l'oeil, 6 trajets



Comment gérer l'interférence entre symboles ?

- Grâce à P symboles pilotes, on estime les coefficients $(h_l)_{l=0,\dots,L-1}$, par exemple en minimisant par rapport aux coefficients $(h_l)_{l=0,\dots,L-1}$ le critère $\sum_{n=1}^P \left| y_n - \sum_{l=0}^{L-1} h_l a_{n-l} \right|^2$
- Déterminer les symboles inconnus du paquet en déterminant la séquence de symboles $(a_n)_{n=P+1,\dots,N_p}$ pour laquelle $\sum_{n=P+1}^{N_p} \left| y_n - \sum_{l=0}^{L-1} \hat{h}_l a_{n-l} \right|^2$.
 Algorithme de Viterbi de complexité $2^{L+1} N_p$ en BPSK, $4^{L+1} N_p$ en QAM4, ..., soit 2^{L+1} ou 4^{L+1} opérations par symbole à estimer.

$L = 10$ est la limite supérieure que l'on peut tolérer. Si $P = 6$, cela impose que $\tau_2 - \tau_1 < 4T$, ou $T > \frac{\tau_2 - \tau_1}{4}$.

La présence d'interférences entre symboles dans le cas de trajets multiples limite le débit symbole.

Exemple: si $d_2 - d_1 = 3\text{km}$, $\tau_2 - \tau_1 = 10^{-5}$, $T \geq 2,5\mu\text{sec}$, $\frac{1}{T} \leq 400\text{KHz}$.

Conclusion: l'existence des trajets multiples rend inopérant l'utilisation des modulations linéaires pour les transmissions haut débit.

Canal de Rayleigh: cas d'un récepteur fixe

En pratique, il existe un grand nombre de réflecteurs proche du récepteur

Scénario mono-trajet : remplacé par grand nombre de trajets multiples arrivant avec des temps d'arrivées $(\tau_l)_{l=1,\dots,L}$ vérifiant $|\tau_k - \tau_l| \ll T$.

$$\begin{aligned} y(t) &= \left(\sum_l \mu_l e^{-2i\pi f_0 \tau_l} \right) x(t - \tau) + b(t) \\ &= \lambda x(t - \tau) + b(t), \quad \lambda = \sum_l \mu_l e^{-2i\pi f_0 \tau_l} \end{aligned}$$

Sortie du filtre adapté à l'instant $\tau + nT$: $y_n = \lambda a_n + b_n$

Modèle probabiliste de λI

Idée générale: les angles $\theta_l = -2\pi f_0 \tau_l$ ramenés dans $[0, 2\pi]$ peuvent être modélisés comme des tirages aléatoires indépendants selon la loi uniforme sur $[0, 2\pi]$

Justification: Si $f_0 = 1\text{GHz} = 10^9\text{Hz}$, si les $d_k - d_l$ prennent des valeurs de l'ordre de quelques mètres, les $\tau_k - \tau_l$ prennent des valeurs de l'ordre de 10^{-8} , et les $2\pi f_0(\tau_k - \tau_l)$ ont pour ordre de grandeur quelque dizaines. Ramenés dans $[0, 2\pi]$, ils prennent toute valeur possible de $[0, 2\pi]$.

$\lambda = \sum_{l=1}^L \mu_l e^{i\theta_l}$, où les $(\theta_l)_{l=1, \dots, L}$ sont L nombres aléatoires indépendants tirés uniformément sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Modèle probabiliste de λ II

$\lambda = \sum_{l=1}^L \mu_l e^{i\theta_l}$, où les $(\theta_l)_{l=1, \dots, L}$ sont L nombres aléatoires indépendants tirés uniformément sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

- $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, $\lambda_1 = \sum_{l=1}^L \mu_l \cos \theta_l$, $\lambda_2 = \sum_{l=1}^L \mu_l \sin \theta_l$
- $\mathbb{E}(\lambda_1) = \mathbb{E}(\lambda_2) = 0$, $\mathbb{E}(\lambda_1^2) = \mathbb{E}(\lambda_2^2) = \frac{1}{2} \sum_l \mu_l^2$, $\mathbb{E}(\lambda_1 \lambda_2) = 0$.
- Si $\delta^2 = \sum_l \mu_l^2$, on dit que $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ suit la loi $\mathcal{N}_c(0, \delta^2)$.

L grand, utilisation du théorème de la limite centrale

λ_1 et λ_2 sont a peu près des variables aléatoires $\mathcal{N}(0, \frac{\delta^2}{2})$ indépendantes.

Reformulation: $\lambda_1 = \delta x_1$, $\lambda_2 = \delta x_2$, $x_1, x_2 \mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$ indépendantes, $\lambda = \delta x$, $x = x_1 + ix_2$ étant $\mathcal{N}_c(0, 1)$

$|\lambda|^2 = \delta^2 |x|^2$, $|x|^2$ a pour densité de probabilité $e^{-t} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(t)$.

Cas d'un récepteur mobile

- $y(t) = \left(\sum_l \mu_l e^{-2i\pi f_0 \tau_l} e^{-2i\pi \Delta f_l t} \right) x(t - \tau) + b(t) = \lambda(t) x(t - \tau) + b(t)$
- $y_n = \left(\sum_l \mu_l e^{-2i\pi f_0 \tau_l} e^{-2i\pi \Delta f_l (\tau_l + nT)} \right) a_n + b_n = \lambda_n a_n + b_n$

Les λ_n sont des variables aléatoires $\mathcal{N}_c(0, \delta^2)$ qui évoluent lentement au cours du temps.

Conséquences sur les performances: cas du BPSK

$y_n = \lambda a_n + b_n$ avec λ connu

Rapport signal sur bruit instantané $\gamma = \frac{|\lambda|^2}{\sigma^2} = \Gamma |x|^2$, $\Gamma = \mathbb{E}(\gamma) = \frac{\delta^2}{\sigma^2}$ rapport signal sur bruit moyen

Probabilité d'évanouissement profond :

$$P(\gamma < 1) = P(|x|^2 < \frac{1}{\Gamma}) = \int_0^{(\Gamma)^{-1}} e^{-t} dt \simeq \frac{1}{\Gamma} \text{ si } \Gamma \text{ grand.}$$

- Probabilité d'erreur "instantanée" $P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2|\lambda|^2}{\sigma^2}}\right)$
- Probabilité d'erreur "moyenne" $\bar{P}_e = \mathbb{E}_{|\lambda|^2} P_e = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{\Gamma}{1+\Gamma}}\right) \simeq \frac{1}{4\Gamma}$ si Γ grand.

Conclusion: sur le canal de Rayleigh, la probabilité d'erreur décroît en $\frac{1}{\Gamma}$ alors qu'elle décroît comme $e^{-\Gamma}$ sur le canal Gaussien.

Perte de performance catastrophique.

Diversité spatiale en réception

2 antennes de réception

$$y_{1,n} = \lambda_1 a_n + b_{1,n}$$

$$y_{2,n} = \lambda_2 a_n + b_{2,n}$$

$\mathbb{E}|\lambda_i|^2 = \delta^2$, λ_1 et λ_2 indépendantes si les 2 antennes sont suffisamment éloignées (de l'ordre de la longueur d'onde, 33cm si $f_0 = 1\text{GHz}$), $\mathbb{E}|b_{i,n}|^2 = \sigma^2$, $b_{1,n}, b_{2,n}$ indépendantes.

Comment combiner $y_{1,n}$ et $y_{2,n}$?

Solution optimale: maximal ratio combining

$$z_n = \lambda_1^* y_{1,n} + \lambda_2^* y_{2,n} = (|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2) a_n + b_n$$

Rapport signal sur bruit instantané associé à z_n :

$$\gamma = \frac{(|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2)^2}{\mathbb{E}|b_n|^2} = \frac{(|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2)}{\sigma^2} = \gamma_1 + \gamma_2$$

Loi de probabilité de $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$

$\gamma = \Gamma(|x_1|^2 + |x_2|^2)$, où x_1 et x_2 sont $\mathcal{N}_c(0, 1)$ indépendantes.

Densité de probabilité de $|x_1|^2 + |x_2|^2$: $t e^{-t} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}$.

Probabilité d'évanouissement profond

$$P(\gamma < 1) = P(|x_1|^2 + |x_2|^2 < \frac{1}{\Gamma}) = \int_0^{\Gamma^{-1}} t e^{-t} dt \simeq \frac{1}{2\Gamma^2}$$

La probabilité d'évanouissement profond décroît en $\frac{1}{\Gamma^2}$ à la place de $\frac{1}{\Gamma}$ avec une seule antenne.

Avec M antennes, la probabilité d'évanouissement profond décroît en $\frac{1}{\Gamma^M}$

Probabilité d'erreur en fonction de M

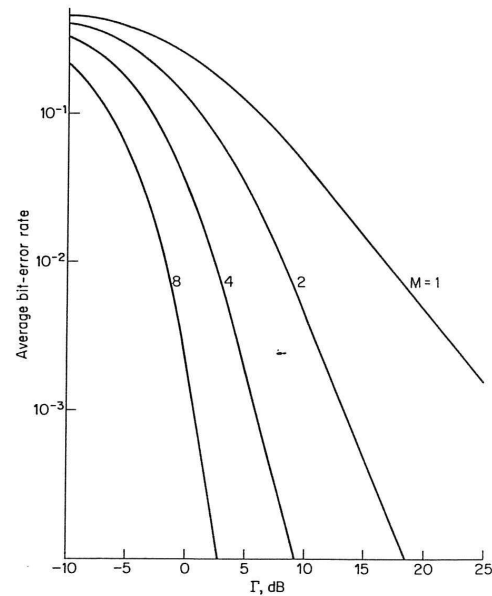


Fig. 13-2 Average bit-error rate for M -branch maximal-ratio-combined DPSK signaling.

Fast-Fading Condition

In the fast-fading condition ($M > 1$), the fading is assumed to be such that the cnr's of two adjacent bits are independent and therefore the bit errors of individual bits are mutually independent. Equation (13-8) can be used to calculate the error probability for each bit. Given a word length of N bits, the probability that m bits will be in error can be obtained through binomial expansion:

$$p(N, m) = \binom{N}{m} (1 - \langle P \rangle)^{N-m} \langle P \rangle^m \quad (13-9)$$

cause the word to be expressed:

The calculation shown in Fig. 13-3 for fading under fast-fading rate decreases as the rate for an error-correcting

$$P_{cw}(t)$$

where $p(N, m)$ is a

Slow-Fading Condition

For a slow-fading condition, the noise ratio throughout example, at a carrier

Diversité spatiale en émission

2 antennes d'émission, 1 antenne de réception

Si on transmet $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sur les antennes 1 et 2 respectivement, on reçoit:

$$y(t) = \lambda_1 x_1(t - \tau) + \lambda_2 x_2(t - \tau) + b(t)$$

Si l'émetteur connaît λ_1 et λ_2 (pas très réaliste, sauf dans des cas très particuliers)

On choisit $x_i(t) = \frac{\lambda_i^*}{\sqrt{|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2}} x(t)$ pour $i = 1, 2$. Somme des puissances de x_1 et x_2 = puissance de x pour comparer de façon objective avec le cas 1 antenne d'émission.

Sortie du filtre adapté à l'instant $\tau + nT$.

$$y_n = \sqrt{|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2} a_n + b_n$$

Rapport signal sur bruit instantané γ

$$\gamma = \frac{|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2}{\sigma^2} = \gamma_1 + \gamma_2$$

Mêmes performances que dans le cas de 1 antenne d'émission / 2 antennes de réception

L'émetteur ne connaît pas λ_1 et λ_2 I

Le code d'Alamouti

- A l'instant $2n$, sur l'antenne 1, $\frac{1}{\sqrt{2}} a_{2n}$, sur l'antenne 2, $\frac{a_{2n+1}}{\sqrt{2}}$
- A l'instant $2n + 1$, sur l'antenne 1, $-\frac{a_{2n+1}^*}{\sqrt{2}}$, sur l'antenne 2, $\frac{1}{\sqrt{2}} a_{2n}^*$

Sorties du filtre adapté aux instants $\tau + 2nT$ et $\tau + (2n + 1)T$

$$y_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda_1 a_{2n} + \lambda_2 a_{2n+1}) + b_{2n}$$
$$y_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\lambda_1 a_{2n+1}^* + \lambda_2 a_{2n}^*) + b_{2n+1}$$

On prend le conjugué de la seconde équation

$$y_{2n+1}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\lambda_1^* a_{2n+1} + \lambda_2^* a_{2n}) + b_{2n+1}^*$$

L'émetteur ne connaît pas λ_1 et λ_2 II

Le code d'Alamouti, suite

$$\begin{pmatrix} y_{2n} \\ y_{2n+1}^* \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2^* & -\lambda_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{2n} \\ a_{2n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{2n} \\ b_{2n+1}^* \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \lambda_1^* & \lambda_2 \\ \lambda_2^* & -\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{2n} \\ y_{2n+1}^* \end{pmatrix} = \frac{|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2}{2} \begin{pmatrix} a_{2n} \\ a_{2n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{b}_{2n} \\ \tilde{b}_{2n+1} \end{pmatrix}$$

avec $\mathbb{E}|\tilde{b}_{2n}|^2 = \mathbb{E}|\tilde{b}_{2n+1}|^2 = \sigma^2 \frac{|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2}{2}$

Rapport signal sur bruit instantané $\gamma = \frac{1}{2} \left(\frac{|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2}{\sigma^2} \right)$

Perte de 3 dB par rapport au cas où on connaît λ_1 et λ_2 .

Diversité induite par un code correcteur d'erreur

Code (N, K)

- Représenter un mot binaire $b = (b_1, \dots, b_K)$ à transmettre de K bits par un mot binaire $c = (c_1, \dots, c_N)$ de N bits avec $N > K$.
- Correspondance qui à tout $b = (b_1, \dots, b_K)$ fait correspondre un mot de code $c = (c_1, \dots, c_N)$
- \mathcal{C} = ensemble des mots de codes = le code
- Le cardinal de \mathcal{C} est égal à $M = 2^K$.

distance de Hamming $d(c, c')$ entre c et c' = nombre de bits dont c et c' diffèrent,
distance minimale d_{min} du code $d_{min} = \min_{c \neq c'} d(c, c')$

Exemple simple, code par répétition $(2K, K)$:

$$N = 2K, b = (b_1, \dots, b_K) \rightarrow c = (b, b) = (b_1, \dots, b_K, b_1, \dots, b_K)$$

Modèle des signaux sur canal de Rayleigh mobile avec symboles ± 1

K bits utiles $b = (b_1, \dots, b_K)$ à transmettre, mot de code $c = (c_1, \dots, c_N)$ associé, vecteur de symboles $a = (a_1, \dots, a_N)^T$ correspondant $a^T = 2c - (1, \dots, 1)$.

\mathcal{A} ensemble des vecteurs de symboles associés aux mots de code, $\text{card}(\mathcal{A}) = M = 2^K$.

Sorties du filtre adapté: $y = (y_1, \dots, y_N)^T$

$y_n = \lambda_n a_n + b_n$ avec λ_n variable aléatoire $\mathcal{N}_c(0, \delta^2)$, b_n variable aléatoire $\mathcal{N}_c(0, \sigma^2)$

$z_n = \text{Re}(y_n e^{-i \arg \lambda_n}) = |\lambda_n| a_n + b_{1,n}$, $b_{1,n}$ est $\mathcal{N}(0, \sigma^2/2)$.

$z = (z_1, \dots, z_N)^T$ donné par $z = \Lambda a + b_1$, $b_1 = (b_{1,1}, \dots, b_{1,N})$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} |\lambda_1| & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & |\lambda_2| & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & |\lambda_N| \end{pmatrix}$$

Indépendance des $(\lambda_n)_{n=1,\dots,N}$

En principe, les $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ varient très lentement au cours du temps.

Sur la durée d'envoi des symboles $(a_n)_{n=1,\dots,N}$, tous les λ_n sont à peu près égaux si rien n'est fait au niveau du schéma d'émission.

La suite des symboles associée à l'envoi d'un grand nombre de paquets de taille N passe dans un entrelaceur dont l'effet est de permuter l'ordre d'envoi des symboles de façon pseudo-aléatoire.

Les sorties de filtre adapté correspondantes sont ensuite desentrelacées

Après désentrelacement, les $(\lambda_n)_{n=1,\dots,N}$ peuvent être considérées comme des variables aléatoires indépendantes.

Estimation du vecteur a transmis

Le vecteur a est estimé par le vecteur \hat{a} de \mathcal{A} solution du problème de minimisation

$$\min_{a' \in \mathcal{A}} \|z - \Lambda a'\|^2$$

\hat{a} est l'estimateur minimisant la probabilité d'erreur.

Le calcul de \hat{a} nécessite en principe d'effectuer de l'ordre de $M = 2^K$ opérations.

En pratique, algorithmes sous-optimaux

Evaluation de probabilités d'erreur

$$\mathcal{A} = \{a(1), \dots, a(M)\}, \mathcal{C} = \{c(1), \dots, c(M)\}$$

$P_{i \rightarrow j}$ probabilité de décider $a(j)$ alors que c'est $a(i)$ qui est transmis.

$$z = \Lambda a(i) + b_1$$

$$P_{i \rightarrow j} = P(\|z - \Lambda a(j)\|^2 < \|z - \Lambda a(i)\|^2)$$

$$P_{i \rightarrow j} = P(\|\Lambda(a(i) - a(j)) + b_1\|^2 < \|b_1\|^2)$$

$$P_{i \rightarrow j} = P\left(b_1^T (a(j) - a(i)) > \frac{1}{2}(a(j) - a(i))^T \Lambda^2 (a(j) - a(i))\right)$$

$$b_1^T (a(j) - a(i)) \text{ suit une loi } \mathcal{N}(0, \frac{\sigma^2}{2}(a(j) - a(i))^T \Lambda^2 (a(j) - a(i))).$$

Evaluation de probabilités d'erreur

$$P_{i \rightarrow j} = P \left(\mathcal{N}(0, 1) > \sqrt{\frac{(a(j) - a(i))^T \Lambda^2 (a(j) - a(i))}{2\sigma^2}} \right)$$

$$P_{i \rightarrow j} = Q \left(\sqrt{\frac{(a(j) - a(i))^T \Lambda^2 (a(j) - a(i))}{2\sigma^2}} \right) = Q \left(\sqrt{\frac{2(c(j) - c(i)) \Lambda^2 (c(j) - c(i))^T}{\sigma^2}} \right)$$

$$P_{i \rightarrow j} \leq \frac{1}{2} \exp - \left[\frac{(c(j) - c(i)) \Lambda^2 (c(j) - c(i))^T}{\sigma^2} \right]$$

$$P_{i \rightarrow j} \leq \frac{1}{2} \exp - \left[\frac{\sum_{n=1}^N |\lambda_n|^2 (c_n(j) - c_n(i))^2}{\sigma^2} \right] = \frac{1}{2} \prod_{n=1}^N \exp - \frac{|\lambda_n|^2 (c_n(j) - c_n(i))^2}{\sigma^2}$$

Probabilité d'erreur moyenne $\bar{P}_{i \rightarrow j} = \mathbb{E} (P_{i \rightarrow j})$.

$$\bar{P}_{i \rightarrow j} \leq \frac{1}{2} \prod_{n=1}^N \mathbb{E} \left[\exp - \frac{(c_n(j) - c_n(i))^2 |\lambda_n|^2}{\sigma^2} \right] = \frac{1}{2} \prod_{n=1}^N \left(\frac{1}{1 + (c_n(j) - c_n(i))^2 \Gamma} \right)$$

$(c_n(j) - c_n(i))^2 = 0$ si les bit n de $c(j)$ et de $c(i)$ coïncident, $(c_n(j) - c_n(i))^2 = 1$ si les bits n de $c(j)$ et de $c(i)$ sont différents.

$d(c(i), c(j))$ distance de Hamming entre $c(i)$ et $c(j)$: $\bar{P}_{i \rightarrow j} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + \Gamma} \right)^{d(c(i), c(j))}$

Conclusion $\bar{P}_{i \rightarrow j} \leq \frac{1}{2} \frac{1}{\Gamma^{d_{min}}}$

Notions sur les modulations OFDM

Motivation: échapper aux problèmes posés par les trajets multiples arrivant avec des temps de retard qui diffèrent d'un ordre de grandeur de T

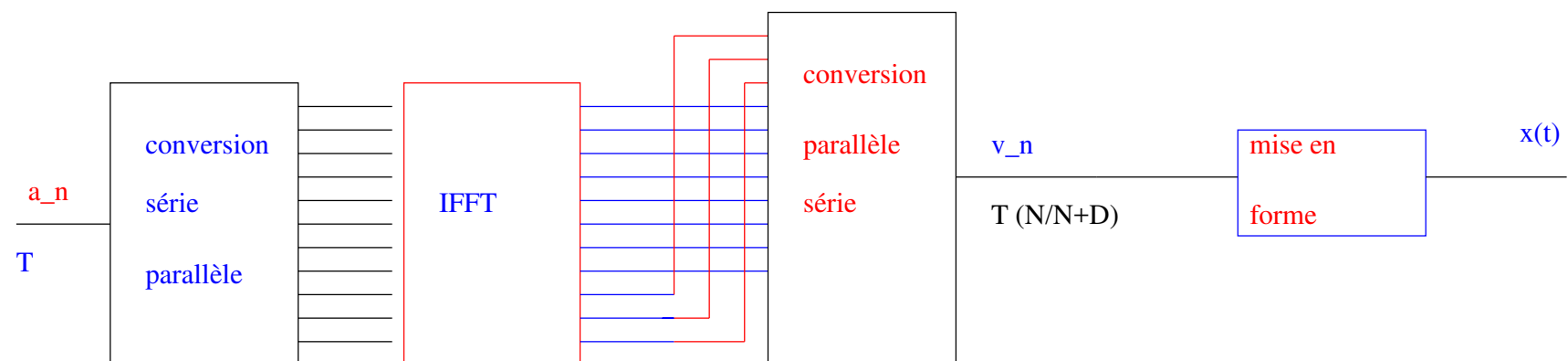
Idee générale pour transmettre une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ au débit $\frac{1}{T}$

- Former les suites $a_{1,n} = a_{nN}$, $a_{2,n} = a_{nN+1}, \dots, a_{N,n} = a_{nN+N-1}$
- Transmettre en même temps à la période symbole NT les N suites $a_{1,n}, a_{2,n}, \dots, a_{N,n}$ via des signaux $x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)$, dont les bandes passantes sont des intervalles centrés autour des fréquences $0, \frac{1}{NT}, \dots, \frac{N-1}{NT}$, en espérant pouvoir les séparer facilement.

Théoriquement possible, mais en pratique la séparation s'avère délicate en présence de trajets multiples.

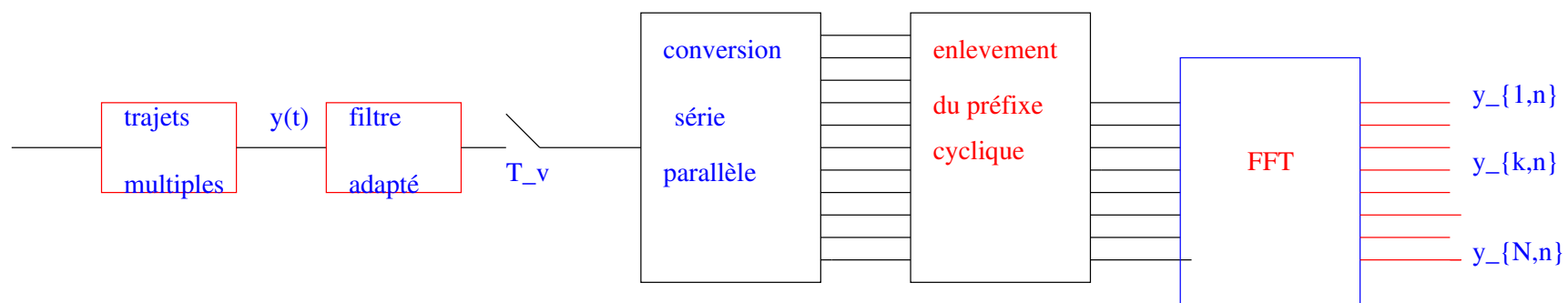
L'émetteur OFDM

Utilisation d'un préfixe cyclique



Le récepteur

Le récepteur.



Récupération des symboles

En sortie du filtre adapté, après échantillonnage :

$$z_n = \sum_{l=0}^L h_l v_{n-l}, \text{ et on pose } h(f) = \sum_{l=0}^L h_l e^{-2i\pi l f}.$$

On montre que si le nombre d'échantillons de l'intervalle de garde est supérieur à L , alors:

$$y_{k,n} = h(k/N) a_{k,n} \text{ pour } k = 1, \dots, N.$$

Schéma équivalent

