

Performances des récepteurs des systèmes MIMO.

Les récepteurs.

Le signal reçu : $\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t)$.

Echantillonnage aux bons instants:

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{H}\mathbf{a}_n + \mathbf{v}_n$$

où $E(\mathbf{v}_n \mathbf{v}_n^H) = \sigma^2 \mathbf{I}_N$. \mathbf{H} supposé connu.

Un récepteur = stratégie d'estimation des composantes de \mathbf{a}_n à partir de \mathbf{y}_n .

Comparer les performances en fonctions du nombre d'antennes à puissance transmise constante:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H} \frac{1}{\sqrt{K}} \mathbf{a} + \mathbf{v} = \mathbf{W}\mathbf{a} + \mathbf{v}.$$

Le maximum de vraisemblance.

Estimateur minimisant la probabilité d'erreur sur les composantes de \mathbf{a} :

Trouver le vecteur \mathbf{a}_* de l'alphabet pour lequel $\|\mathbf{y} - \mathbf{W}\mathbf{a}\|^2$ est minimum.

Si les composantes de \mathbf{a} prennent 4 valeurs, complexité de $NK4^K$. Simplifications possibles.

Une façon d'évaluer les performances.

Le débit maximum pouvant être transporté de façon fiable en utilisant ce récepteur:

$$C_{opt}(\sigma^2) = \left[\log \det \left(\mathbf{I}_N + \frac{\mathbf{W}\mathbf{W}^H}{\sigma^2} \right) \right]$$

Le récepteur MMSE.

Estimer a_k par une combinaison linéaires composantes de \mathbf{y} , $\hat{a}_k = \mathbf{g}_k \mathbf{y}$.

Critère: minimiser $(|a_k - \mathbf{g}_k \mathbf{y}|^2)$.

$$\hat{a}_k = \mathbf{w}_k^H (\mathbf{W} \mathbf{W}^H + \sigma^2 \mathbf{I}_N)^{-1} \mathbf{y}.$$

2 façons d'évaluer les performances.

Le taux d'erreur. Si $\beta_k = \mathbf{w}_k^H (\mathbf{W}_k \mathbf{W}_k^H + \sigma^2 \mathbf{I}_N)^{-1} \mathbf{w}_k$, \mathbf{W}_k obtenue en supprimant \mathbf{w}_k dans \mathbf{W} .

$$P_e = \left[\frac{\sum_{k=1}^K Q(\sqrt{\beta_k})}{K} \right]$$

Le débit maximum pouvant être transporté de façon fiable en utilisant ce récepteur:

$$C_{mmse}(\sigma^2) = \sum_{k=1}^K [\log(1 + \beta_k)]$$

Analyse des performances.

Type de questions.

- Comment le débit maximum évolue-t-il avec K et N ?
- Quelle est l'influence des matrices \mathbf{R}_r et \mathbf{R}_t sur les performances ?
- Comparaison des performances des deux récepteurs.

Résultats simples.

Si $K = 1$, N grand et σ^2 petit. \mathbf{W} vecteur colonne, composantes w_n de variances 1.

$$C_{opt}(\sigma^2) = C_{mmse}(\sigma^2) \simeq \left[\log \left(\frac{\sum_{n=1}^N |w_n|^2}{\sigma^2} \right) \right] \simeq \log \left(\frac{N}{\sigma^2} \right)$$

Si $N = 1$ et K grand. \mathbf{W} vecteur ligne, composantes w_k de variances $\frac{1}{K}$.

$$C_{opt}(\sigma^2) \simeq \log \left(1 + \frac{1}{\sigma^2} \right), C_{mmse}(\sigma^2) \simeq \frac{1}{1 + \sigma^2}$$

Remarque. Si $K = N = 1$, $C_{opt}(\sigma^2) = \left(\log \left(1 + \frac{|w|^2}{\sigma^2} \right) \right) < \log \left(1 + \frac{1}{\sigma^2} \right)$

La problématique K et N grands.

L'exemple de $C_{opt}(\sigma^2)$.

$$C_{n,opt}(\sigma^2) = \frac{1}{K} \left[\log \det \left(\mathbf{I}_N + \frac{\mathbf{W}\mathbf{W}^H}{\sigma^2} \right) \right]$$

Soient $(\lambda_n)_{n=1,\dots,N}$ les valeurs propres (positives) de $\mathbf{W}\mathbf{W}^H$.

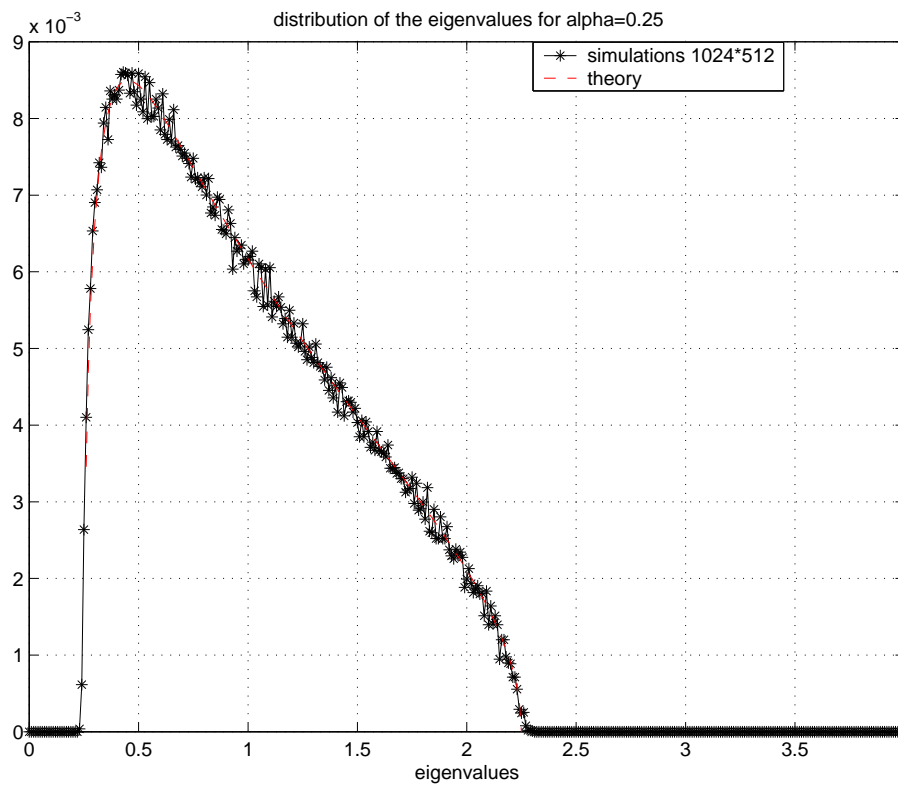
$$C_{n,opt}(\sigma^2) = \frac{1}{K} \sum_{n=1}^N \log \left(1 + \frac{\lambda_n}{\sigma^2} \right)$$

Converge vers une quantité déterministe $\bar{C}_{n,opt}(\sigma^2)$ quand K et N tendent vers l'infini de telle façon que $\frac{K}{N} \rightarrow \alpha$.

$C_{opt}(\sigma^2) \simeq K\bar{C}_{n,opt}(\sigma^2) + \text{Variable aléatoire gaussienne centrée de variance fixe.}$

Illustration dans le cas $\mathbf{R}_r = \mathbf{I}_N, \mathbf{R}_t = \mathbf{I}_K$.

Histogrammes des valeurs propres de diverses réalisations de $\mathbf{W}\mathbf{W}^H$.



La distribution de Marcenko-Pastur

Quand $\frac{K}{N} \rightarrow \alpha$, la distribution des valeurs propres de $\mathbf{W}\mathbf{W}^H$ converge la distribution μ dite de "Marcenko-Pastur" (1967)

- Si $\alpha > 1$, $d\mu(\lambda) = f(\lambda)d\lambda$ avec

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi\lambda} \sqrt{[(1 + \sqrt{\alpha})^2 - \lambda][\lambda - (1 - \sqrt{\alpha})^2]} \text{ si } \lambda \in [(\sqrt{\alpha} - 1)^2, (\sqrt{\alpha} + 1)^2]$$

- Si $\alpha < 1$,

$$d\mu(\lambda) = (1 - \alpha)\delta(\lambda) + f(\lambda)d\lambda$$

Etude du cas général: valeurs propres de $\mathbf{W}\mathbf{W}^H$.

Normalisations. $\frac{1}{N} \text{Trace}(\mathbf{R}_r) = \frac{1}{K} \text{Trace}(\mathbf{R}_t) = 1$.

$$\mathbf{R}_r = \mathbf{U}_r \mathbf{D}_r \mathbf{U}_r^H, \mathbf{R}_t = \mathbf{U}_t \mathbf{D}_t \mathbf{U}_t^H.$$

$\mathbf{W} = \mathbf{R}_r^{1/2} \overline{\mathbf{W}} \mathbf{R}_t^{1/2}$ avec $\overline{\mathbf{W}}$ i.i.d gaussienne.

$$\mathbf{W} = \mathbf{U}_r \mathbf{D}_r^{1/2} \mathbf{U}_r^H \overline{\mathbf{W}} \mathbf{U}_t \mathbf{D}_t^{1/2} \mathbf{U}_t^H$$

On pose $\tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{U}_r^H \overline{\mathbf{W}} \mathbf{U}_t$, i.i.d. gaussienne, $\Sigma = \mathbf{D}_r^{1/2} \tilde{\mathbf{W}} \mathbf{D}_t^{1/2}$.

$$\mathbf{W} = \mathbf{U}_r \Sigma \mathbf{U}_t^H, \mathbf{W}\mathbf{W}^H = \mathbf{U}_r \Sigma \Sigma^H \mathbf{U}_r^H$$

Valeurs propres de $\mathbf{W}\mathbf{W}^H$ = valeurs propres de $\Sigma \Sigma^H$.

Le problème à résoudre.

$$\Sigma = \mathbf{D}_r^{1/2} \tilde{\mathbf{W}} \mathbf{D}_t^{1/2} \text{ avec } \tilde{\mathbf{W}} \text{ i.i.d.}$$

Les éléments de Σ sont indépendants entre eux; l'élément $\Sigma_{n,k}$ est de variance $d_{r,n} d_{t,k}$.

$$C_{n,opt}(\sigma^2) = \frac{1}{K} \log \det \left(\mathbf{I}_N + \frac{\Sigma \Sigma^H}{\sigma^2} \right)$$

$$\frac{dC_{n,opt}(\sigma^2)}{d\sigma^2} = -\frac{N}{K} \left(1 - \frac{1}{N} \text{Trace} [\Sigma \Sigma^H + \sigma^2]^{-1} \right)$$

Etudier le comportement de $f(\sigma^2) = \frac{1}{N} \text{Trace} [\Sigma \Sigma^H + \sigma^2]^{-1}$

La technique de base I.

On pose:

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}(\sigma^2) &= [\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Sigma}^H + \sigma^2\mathbf{I}]^{-1} \\ \tilde{\mathbf{Q}}(\sigma^2) &= [\boldsymbol{\Sigma}^H\boldsymbol{\Sigma} + \sigma^2\mathbf{I}]^{-1}\end{aligned}$$

η_i ligne i de $\boldsymbol{\Sigma}$, ξ_j colonne j de $\boldsymbol{\Sigma}$.

$$\begin{aligned}q_i(\sigma^2) &= \frac{1}{\sigma^2(1 + \eta_i(\boldsymbol{\Sigma}_i^H\boldsymbol{\Sigma}_i + \sigma^2\mathbf{I})^{-1}\eta_i^H)} \\ \tilde{q}_j(\sigma^2) &= \frac{1}{\sigma^2(1 + \xi_j^H(\boldsymbol{\Sigma}^j\boldsymbol{\Sigma}^{jH} + \sigma^2\mathbf{I})^{-1}\xi_j)}\end{aligned}$$

La technique de base II.

$\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_K)$, les $(z_j)_{j=1, \dots, K}$ centrées, de variance 1, indépendantes et de même loi.

\mathbf{B} matrice aléatoire $K \times K$ indépendante de \mathbf{z} .

Alors:

$$\frac{1}{K} \mathbf{z} \mathbf{B} \mathbf{z}^H \simeq \frac{1}{K} \text{Trace}(\mathbf{B}) \text{ si } K \rightarrow +\infty$$

Conséquence.

$$\eta_i (\boldsymbol{\Sigma}_i^H \boldsymbol{\Sigma}_i + \sigma^2 \mathbf{I})^{-1} \eta_i^H \simeq d_r(i) \frac{1}{K} \sum_{l=1}^K d_t(l) \tilde{q}_l(\sigma^2)$$
$$\xi_j^H (\boldsymbol{\Sigma}^j \boldsymbol{\Sigma}^{jH} + \sigma^2 \mathbf{I})^{-1} \xi_j \simeq d_t(j) \frac{1}{K} \sum_{k=1}^N d_r(k) q_k(\sigma^2)$$

La technique de base III.

On pose $\delta(\sigma^2) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^N d_r(k) q_k(\sigma^2)$, $\tilde{\delta}(\sigma^2) = \frac{1}{K} \sum_{l=1}^K d_t(l) \tilde{q}_l(\sigma^2)$

$$q_i(\sigma^2) \simeq \frac{1}{\sigma^2(1 + d_r(i)\tilde{\delta}(\sigma^2))}$$

$$\tilde{q}_j(\sigma^2) \simeq \frac{1}{\sigma^2(1 + d_t(j)\delta(\sigma^2))}$$

et on voit immédiatement que δ et $\tilde{\delta}$ vérifient à peu près le système d'équation:

$$\delta(\sigma^2) \simeq \frac{1}{K} \sum_{k=1}^N \frac{d_r(k)}{\sigma^2(1 + d_r(k)\tilde{\delta}(\sigma^2))}$$

$$\tilde{\delta}(\sigma^2) \simeq \frac{1}{K} \sum_{l=1}^K \frac{d_t(l)}{\sigma^2(1 + d_t(l)\delta(\sigma^2))}$$

Illustration dans le cas $\mathbf{R}_t = \mathbf{I}_K$.

Espérance mathématique de $C_{n,opt}(\sigma^2)$.

