I] Produit de Convolution dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$

$\mathbb{L}^1(\mathbb{R}) = \{ f(t) \mid \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, dt < +\infty \}$ Si $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, $\|f\|_1 = \int |f(t)|\, dt$.

Définition et Proposition

Soient f et g 2 fonctions de $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$. On appelle produit de convolution de f avec g la fonction notée $f * g$ définie par

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\, g(t-s)\, ds$$

Alors, $f * g$ est définie pour tout t, la fonction $t \to (f * g)(t)$ est également une fonction de $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ et $\|f * g\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |(f * g)(t)|\, dt \leq \|f\|_1 \, \|g\|_1$.

Preuve

$$(s,t) \to f(s)\,g(t-s)$$

$$\int \varphi(x)\,dx \qquad u = \Psi(x) \qquad du = \Psi'(x)\,dx$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(s)\, g(t-s)|\, \underbrace{ds\,dt} < +\infty$$

$$\|$$

$$\begin{cases} u = s \\ v = t-s \end{cases}$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(u)\, g(v)|\, du\,dv = \int_{\mathbb{R}^2} |f(u)|\,|g(v)|\, du\,dv$$

$$J(s,t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$du\,dv = \underbrace{\det[J(s,t)]}_{1}\, ds\,dt$$

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^2} |f(u)|\,|g(v)|\, du\,dv} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(u)|\, du\right)\left(\int_{\mathbb{R}} |g(v)|\, dv\right) < +\infty$$

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} |f(u)|\,|g(v)|\, du \right] dv = \int_{\mathbb{R}} |g(v)| \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} |f(u)|\, du \right) dv = \int_{\mathbb{R}} |f(u)|\, du \cdot \int_{\mathbb{R}} |g(v)|\, dv.$$

$$\iint |f(s)\, g(t-s)|\, ds\, dt < +\infty$$

Pour tout t, $s \longrightarrow f(s)\, g(t-s)$ est sommable, $\int_{\mathbb{R}} |f(s)\, g(t-s)|\, ds < +\infty$

$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(s)\, g(t-s)\, ds$ a un sens $\Rightarrow f * g$ est bien défini sur $\mathbb{R}$.

$t \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f(s)\, g(t-s)\, ds$ est sommable, $\int_{\mathbb{R}} \Big| \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(s)\, g(t-s)\, ds}_{(f*g)(t)} \Big|\, dt < +\infty$

$\int_{\mathbb{R}} |(f*g)(t)|\, dt < +\infty \Rightarrow f * g \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$.

$$\|f * g\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |(f*g)(t)|\, dt = \int_{\mathbb{R}} \Big(\underbrace{\Big| \int_{\mathbb{R}} f(s)\, g(t-s)\, ds \Big|}_{\leq \int_{\mathbb{R}} |f(s)|\, |g(t-s)|\, ds} \Big)\, dt \leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(s)|\, |g(t-s)|\, ds\, dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |f(s)|\, ds \int_{\mathbb{R}} |g(t)|\, dt = \|f\|_1\, \|g\|_1$$

Propriétés du produit de convolution

- $(f*g)(t) = (g*f)(t)$

$$(g*f)(t) = \int_{\mathbb{R}} g(s)\, f(t-s)\, ds \qquad u = t-s, \quad s = t-u, \quad ds = -du$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(s)\, f(t-s)\, ds = \int_{+\infty}^{-\infty} g(t-u)\, f(u)\, (-du) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, g(t-u)\, du = (f*g)(t)$$

- $(f*g)*h = f*(g*h) = f*g*h$

II] Transformée de Fourier dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$

II-1] Définition et premières propriétés

<u>Définition</u> Soit $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$. Alors, on définit la transformée de f comme la fonction $\hat{f}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-2i\pi\nu t}\, dt$

<u>Remarque</u> $e^{-2i\pi\nu t} = \cos(2\pi\nu t) - i\sin 2\pi\nu t$

$$\hat{f}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \cos 2\pi\nu t\, dt - i \int_{\mathbb{R}} f(t) \sin 2\pi\nu t\, dt$$

Si f est à valeurs réelles, $Re\, \hat{f}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \cos 2\pi\nu t\, dt$, $Im(\hat{f}(\nu)) = -\int_{\mathbb{R}} f(t) \sin 2\pi\nu t\, dt$.

<u>Proposition</u> $\hat{f}(\nu)$ est définie $\forall \nu \in \mathbb{R}$, $|\hat{f}(\nu)| \leq \|f\|_1$ $\forall \nu \in \mathbb{R}$, $\nu \to \hat{f}(\nu)$ est continue sur $\mathbb{R}$, $\lim_{\nu \to \pm\infty} |\hat{f}(\nu)| = 0$

$$\int |f(t)\, e^{-2i\pi\nu t}|\, dt = \int |f(t)|\, \underbrace{|e^{-2i\pi\nu t}|}\, dt = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, dt = \|f\|_1 < +\infty$$

$$|\hat{f}(\nu)| = \left| \int f(t)\, e^{-2i\pi\nu t}\, dt \right| \leq \int |f(t)\, e^{-2i\pi\nu t}|\, dt = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, dt = \|f\|_1$$

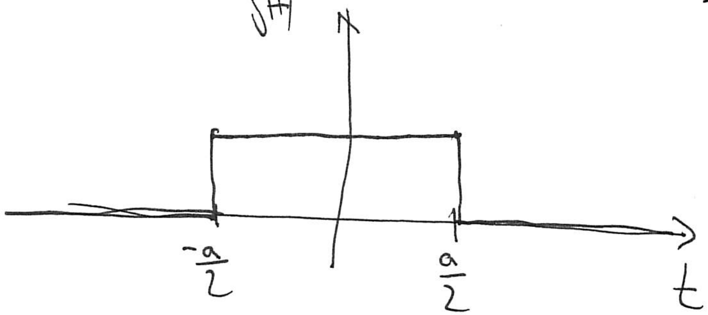
Preuve de la continuité de $\hat{f}$:

$$h(t,\nu) = f(t)\, e^{-2i\pi\nu t} \qquad \forall \nu,\ |h(t,\nu)| = |f(t)| = g(t) \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$$

$$\forall t,\ \nu \to h(t,\nu) \text{ est continue sur } \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \nu \longrightarrow \underbrace{\int_{\mathbb{R}} h(t,\nu)\, dt}_{\hat{f}(\nu)} \text{ est continue sur } \mathbb{R}$$

Exemples $\quad f(t) = \mathbb{1}_{[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]}(t) \qquad \mathbb{1}_A(t) = 1$ si $t \in A$, $= 0$ sinon



$$f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}),\quad \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, dt = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dt = a < +\infty$$

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-2i\pi\nu t}\, dt = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-2i\pi\nu t}\, dt = -\frac{1}{2i\pi\nu}\left[e^{-2i\pi\nu t}\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \quad \text{si } \nu \neq 0$$

$$= -\frac{1}{2i\pi\nu}\left(e^{-i\pi\nu a} - e^{i\pi\nu a}\right) = \frac{1}{2i\pi\nu}\left(e^{i\pi\nu a} - e^{-i\pi\nu a}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi\nu} \sin \pi\nu a$$

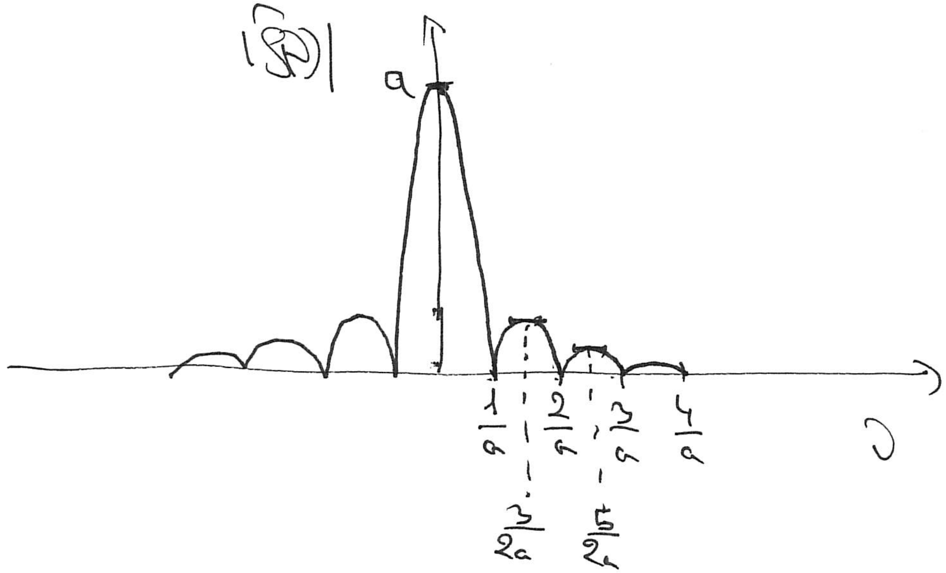
Si $\nu \neq 0$, $\hat{f}(\nu) = \dfrac{\sin \pi\nu a}{\pi\nu}$

Si $\nu = 0$ $\quad \hat{f}(0) = a$

⑦

$$\hat{f}(\nu) = \frac{\sin \pi \nu a}{\pi \nu} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \hat{f}(\nu) = 0 : \\ \nu \neq 0 \end{array} \right. \quad \sin \pi \nu a = 0 \iff \pi \nu a = k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$$

$$\nu = k \cdot \frac{1}{a}$$



$$f(t) = e^{-t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t) = \left\{ \begin{array}{ll} e^{-t} & t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{array} \right.$$

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt \stackrel{?}{=} -\left(e^{-t}\right)_0^{+\infty} = 1$$

$$\int_0^A e^{-t}\, dt = -\left(e^{-t}\right)_0^A = -\left(e^{-A} - 1\right) = 1 - e^{-A}$$

Si $A \to +\infty$, $e^{-A} \to 0$, $\int_0^A e^{-t}\, dt \to 1$.

$$\int_0^{\infty} e^{-t}\, dt = 1. \qquad f \in L^1(\mathbb{R})$$

$$\hat{f}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi\nu t}\, dt = \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-2i\pi\nu t}\, dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-t(1+2i\pi\nu)}\, dt = \frac{-1}{1+2i\pi\nu} \left[e^{-t(1+2i\pi\nu)} \right]_0^{+\infty}$$

$e^{-t(1+2i\pi\nu)}$ si $t \to +\infty$, $\left| e^{-t(1+2i\pi\nu)} \right| = e^{-t} \to 0$

$$\boxed{\hat{f}(\nu) = \frac{1}{1+2i\pi\nu}}$$

II – 1] Propriétés

a) Linéarité

f et g 2 fonctions de $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), alors, $\underbrace{\widehat{(\lambda f + \mu g)}(\nu)}_{\int (\lambda f(t) + \mu g(t)) e^{-2i\pi\nu t} dt} = \lambda \hat{f}(\nu) + \mu \hat{g}(\nu)$

$$\int (\lambda f(t) + \mu g(t)) e^{-2i\pi\nu t} dt = \lambda \int f(t) e^{-2i\pi\nu t} dt + \mu \int g(t) e^{-2i\pi\nu t} dt$$

b) Symétries diverses

Si f est à valeurs réelles, $\hat{f}$ a la symétrie hermitienne, $\hat{f}(-\nu) = \left(\hat{f}(\nu)\right)^*$

Charles Hermite

$*$: complexe conjugué.

$$\hat{f}(\nu) = \underbrace{\int f(t) \cos 2\pi\nu t \, dt}_{\in \mathbb{R}} - i \underbrace{\int f(t) \sin 2\pi\nu t \, dt}_{\in \mathbb{R}}$$

$$\hat{f}(-\nu) = \int f(t) \cos 2\pi\nu t \, dt + i \int f(t) \sin 2\pi\nu t \, dt = \left(\hat{f}(\nu)\right)^*$$

[implique :

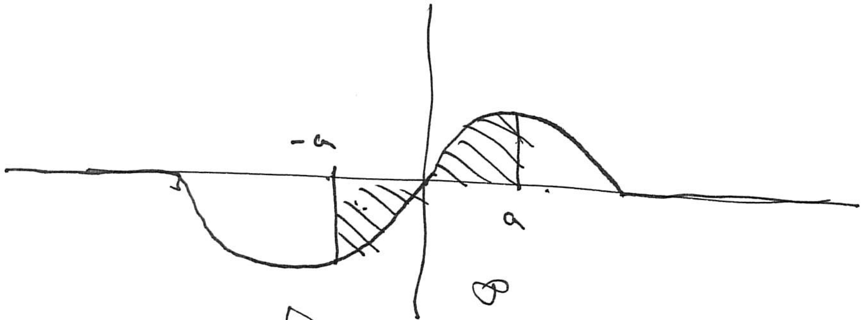
$*$ $\nu \to |\hat{f}(\nu)|$ est paire $\quad *$ $\nu \to \operatorname{Arg} \hat{f}(\nu)$ impaire $\quad \operatorname{Arg} \hat{f}(-\nu) = -\operatorname{Arg} \hat{f}(\nu)$

Si f est réelle et paire, $\hat{f}$ est réelle et paire.

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos 2\pi\nu t \, dt - i \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin 2\pi\nu t \, dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin 2\pi\nu t \, dt = 0$$ car $t \longrightarrow f(t) \sin 2\pi\nu t$ est impaire.

L'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique par rapport à 0 est nulle



Donc, $\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos 2\pi\nu t \, dt = \hat{f}(-\nu)$

Remarque

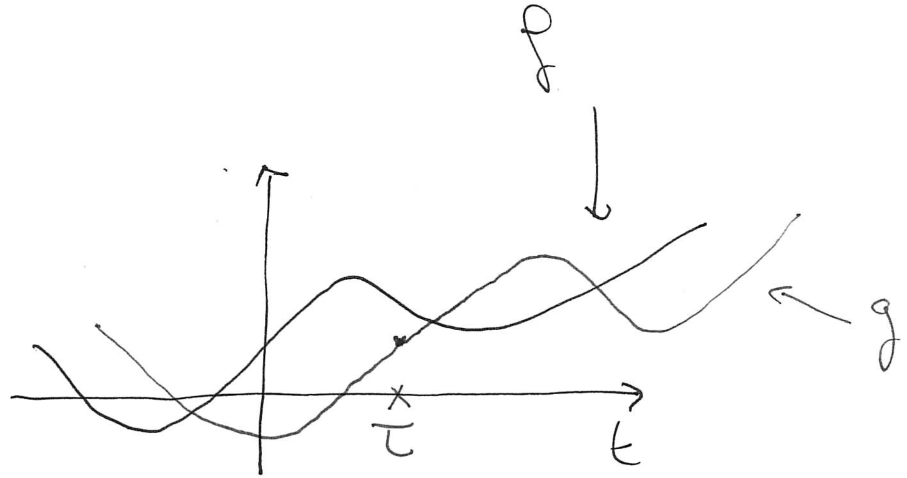
$$\hat{f}(\nu) = 2 \int_{0}^{+\infty} f(t) \cos 2\pi\nu t \, dt$$

Si f est impaire et réelle, $\hat{f}$ est impaire et imaginaire pure.

c) Autres propriétés

- Translation

$f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, $\quad g(t) = f(t-\tau)$



$$\hat{g}(\nu) = e^{-2i\pi\nu\tau}\,\hat{f}(\nu)$$

$$\hat{g}(\nu) = \int g(t)\, e^{-2i\pi\nu t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)\, e^{-2i\pi\nu t}\, dt \qquad u = t-\tau \qquad \hat{g}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-2i\pi\nu(u+\tau)}\, du$$

$$e^{-2i\pi\nu(u+\tau)} = e^{-2i\pi\nu u}\, e^{-2i\pi\nu\tau}$$

$$\hat{g}(\nu) = e^{-2i\pi\nu\tau} \underbrace{\int f(u)\, e^{-2i\pi\nu u}\, du}_{\hat{f}(\nu)}$$

Multiplication par une sinusoïde

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \quad , \quad g(t) = e^{2i\pi\nu_0 t} f(t) \quad , \quad \hat{g}(\nu) = \hat{f}(\nu - \nu_0)$$

$t \mapsto e^{2i\pi\nu_0 t}$ périodique de période $\frac{1}{\nu_0}$

$$e^{2i\pi\nu_0\left(t + \frac{1}{\nu_0}\right)} = e^{\left(2i\pi\nu_0 t + 2i\pi\right)} = \underbrace{e^{2i\pi}}_{1 = \cos 2\pi + i \sin 2\pi} \cdot e^{2i\pi\nu_0 t}$$

$$\hat{g}(\nu) = \int g(t)\, e^{-2i\pi\nu t}\, dt = \int f(t)\, e^{2i\pi\nu_0 t}\, e^{-2i\pi\nu t}\, dt = \int f(t)\, e^{-2i\pi(\nu - \nu_0)t}\, dt$$
$$= \hat{f}(\nu - \nu_0)$$

$$h(t) = f(t) \underbrace{\cos 2\pi\nu_0 t}_{\frac{1}{2}\left(e^{2i\pi\nu_0 t} + e^{-2i\pi\nu_0 t}\right)} \qquad \hat{h}(\nu) = \frac{1}{2}\left(\hat{f}(\nu - \nu_0) + \hat{f}(\nu + \nu_0)\right)$$

$$h(t) = \frac{1}{2} f(t)\, e^{2i\pi\nu_0 t} + \frac{1}{2} f(t)\, e^{-2i\pi\nu_0 t} \quad , \quad \hat{h}(\nu) = \frac{1}{2}\hat{f}(\nu - \nu_0) + \frac{1}{2}\hat{f}(\nu + \nu_0)$$

$$h(t) = f(t) \sin 2\pi \nu_0 t$$

$$\hat{h}(\nu) = \frac{1}{2i}\left(\hat{f}(\nu-\nu_0) - \hat{f}(\nu+\nu_0)\right)$$

$$\sin 2\pi\nu_0 t = \frac{1}{2i}\left(e^{2i\pi\nu_0 t} - e^{-2i\pi\nu_0 t}\right)$$