[IV] Transformée de Fourier

Notes du cours du 20/09/2021

[IV]-1 Définition

$x(t)$ tel que $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\, dt < +\infty$. On appelle transformée de Fourier de x la fonction $\hat{x}(\nu)$ définie pour $\nu \in \mathbb{R}$ par :

$$\hat{x}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-2i\pi\nu t}\, dt$$

Remarques

- $\left| x(t)\, e^{-2i\pi\nu t} \right| = |x(t)|$ Donc, $\int_{-\infty}^{+\infty} \left| x(t)\, e^{-2i\pi\nu t} \right| dt < +\infty$

donc $\hat{x}(\nu)$ définie pour tout $\nu \in \mathbb{R}$.

- $\hat{x}(\nu)$ est en général un nombre complexe, même si $x(t) \in \mathbb{R}$ pour tout t : $e^{-2i\pi\nu t} = (\cos 2\pi\nu t - i \sin 2\pi\nu t)$

$$\Rightarrow \hat{x}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos 2\pi\nu t - i \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin 2\pi\nu t\, dt$$

Exemples de calcul

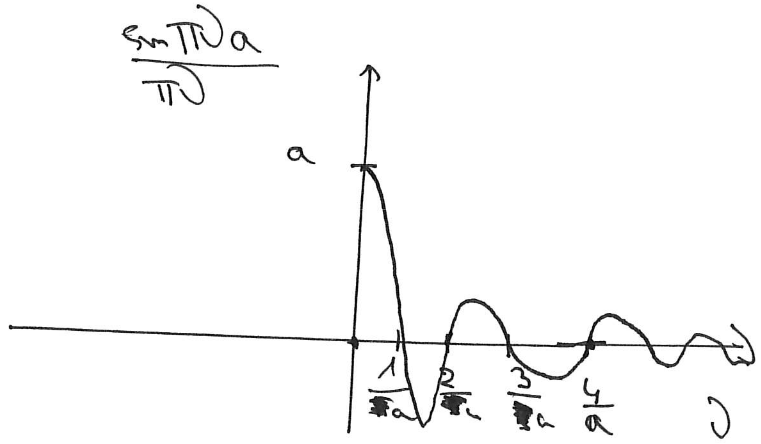
$$x(t) = \mathbb{1}_{[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]}(t)$$

$$\hat{x}(\nu) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-2i\pi\nu t}\, dt$$

. si $\nu = 0$, $\hat{x}(0) = a$

. si $\nu \neq 0$, $\displaystyle\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-2i\pi\nu t}\, dt = \frac{-1}{2i\pi\nu}\left(e^{-2i\pi\nu t}\right)_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}$

$$= \frac{-1}{2i\pi\nu}\left(e^{-2i\pi\nu\frac{a}{2}} - e^{2i\pi\nu\frac{a}{2}}\right) = \frac{1}{\pi\nu}\sin\pi\nu a$$



$$x(t) = e^{-t}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t)$$

$$\hat{x}(\nu) = \int_0^{+\infty} e^{-t} e^{-2i\pi\nu t}\, dt = \int_0^{\infty} e^{-t(1+2i\pi\nu)}\, dt = \frac{-1}{(1+2i\pi\nu)}\left[e^{-t(1+2i\pi\nu)}\right]_0^{+\infty}$$

où par définition :

$$\left[e^{-t(1+2i\pi\nu)} \right]_0^{+\infty} = \underbrace{\lim_{t \to +\infty} e^{-t(1+2i\pi\nu)}}_{0} - \underbrace{\left(e^{-t(1+2i\pi\nu)} \right)_{t=0}}_{1}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{x}(\nu) = \frac{1}{1+2i\pi\nu}$$

IV-2] Propriétés basiques

. Si $x(t) \in \mathbb{R}$ pour tout t, $\hat{x}(-\nu) = \left(\hat{x}(\nu)\right)^*$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |\hat{x}(-\nu)| = |\hat{x}(\nu)| \\ \arg(\hat{x}(-\nu)) = -\arg \hat{x}(+\nu) \end{cases}$$

$$\hat{x}(\nu) = \int x(t) \cos 2\pi\nu t \, dt - i \int x(t) \sin 2\pi\nu t \, dt \qquad \sin(-2\pi\nu t) = -\sin 2\pi\nu t$$

$$\hat{x}(-\nu) = \int x(t) \cos 2\pi\nu t \, dt + i \int x(t) \sin 2\pi\nu t \, dt = \hat{x}(\nu)^*$$

. Si $\tau \in \mathbb{R}$, et si ~~$y(t-\tau) =$~~ $y(t) = x(t-\tau)$, alors,

$$\hat{y}(\nu) = \hat{x}(\nu)\, e^{-2i\pi\nu\tau}$$

$$\hat{y}(\nu) = \int x(t-\tau)\, e^{-2i\pi\nu t} \, dt \qquad u = t-\tau \Leftrightarrow t = u+\tau$$

$$\hat{y}(\nu) = \int x(u)\, e^{-2i\pi\nu(u+\tau)} \, du = \hat{x}(\nu)\, e^{-2i\pi\nu\tau}$$

- $y(t) = x(t)\, e^{2i\pi\nu_0 t} \Rightarrow \hat{y}(\nu) = \hat{x}(\nu-\nu_0)$

$$\hat{y}(\nu) = \int x(t)\, e^{2i\pi\nu_0 t}\, e^{-2i\pi\nu t}\, dt = \int x(t)\, e^{-2i\pi(\nu-\nu_0)t}\, dt = \hat{x}(\nu-\nu_0)$$

- $y(t) = x(t)\cos 2\pi\nu_0 t \Rightarrow \hat{y}(\nu) = \frac{1}{2}\left[\hat{x}(\nu-\nu_0) + \hat{x}(\nu+\nu_0)\right]$

- $x(t)$ réelle et paire $\Rightarrow$ $\hat{x}(\nu)$ réelle et paire et $\hat{x}(\nu) = 2\int_0^\infty x(t)\cos 2\pi\nu t\, dt$

$$\hat{x}(\nu) = \int x(t)\cos 2\pi\nu t\, dt - i\int x(t)\sin 2\pi\nu t\, dt$$

$t \to x(t)\sin 2\pi\nu t$ est impaire $\Rightarrow \int_{-A}^{A} x(t)\sin 2\pi\nu t\, dt = 0$

$\forall A \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin 2\pi\nu t\, dt = 0$

$$\Rightarrow \hat{x}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos 2\pi\nu t\, dt = 2\int_0^{+\infty} x(t)\cos 2\pi\nu t\, dt$$

$\Rightarrow$ $\nu \to \hat{x}(\nu)$ est à valeurs réelles, et

$\nu \to \hat{x}(\nu)$ est paire

- Si $a \neq 0$, et $y(t) = x(at)$, alors $\hat{y}(\nu) = \frac{1}{|a|}\hat{x}(\nu/a)$

Si $a > 0$, $\hat{y}(\nu) = \int x(at)\, e^{-2i\pi\nu t}\, dt$ $\quad u = at$.

$$\hat{y}(\nu) = \frac{1}{a}\int x(u)\, e^{-2i\pi\frac{\nu}{a}u}\, du = \frac{1}{a}\hat{x}(\nu/a)$$

IV-3) Transformée de Fourier et dérivation

- TF de $x'(t) = 2i\pi\nu\, \hat{x}(\nu)$

ou encore $\frac{dx}{dt} \longleftrightarrow 2i\pi\nu\, \hat{x}(\nu)$

$\int_{-\infty}^{\infty} x'(t)\, e^{-2i\pi\nu t}\, dt$: intégration par parties

$u(t) = e^{-2i\pi\nu t}$ $\qquad u'(t) = -2i\pi\nu\, e^{-2i\pi\nu t}$

$v'(t) = x'(t)$ $\qquad v(t) = x(t)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x'(t)\, e^{-2i\pi\nu t}\, dt = \underbrace{\left[x(t)\, e^{-2i\pi\nu t}\right]_{-\infty}^{+\infty}}_{\text{On peut montrer que cela vaut } 0} + 2i\pi\nu \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-2i\pi\nu t}\, dt}_{\hat{x}(\nu)}$$

- Par itération, $x^{(n)}(t) \longleftrightarrow (2i\pi\nu)^n\, \hat{x}(\nu)$

- TF de $t\,x(t) = -\frac{1}{2i\pi} \frac{d\hat{x}(\nu)}{d\nu}$

$$\hat{x}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-2i\pi\nu t}\, dt \Rightarrow \frac{d\hat{x}(\nu)}{d\nu} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\nu}\left(x(t)\, e^{-2i\pi\nu t}\right) dt$$

$$= -2i\pi \int_{-\infty}^{+\infty} t\, x(t)\, e^{-2i\pi\nu t}\, dt$$

- Par itération : $t^n x(t) \longleftrightarrow \left(-\frac{1}{2i\pi}\right)^n \frac{d^n \hat{x}(\nu)}{d\nu}$

IV-4 Transformée de Fourier et produit de convolution

$$\widehat{(x * y)}(\nu) = \hat{x}(\nu) . \hat{y}(\nu)$$

Exemple. $x(t) = y(t) = e^{-t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t)$

On sait que comme $x(t) = y(t) = 0$ si $t < 0$, alors,

$(x * y)(t) = 0$ si $t < 0$ et $(x * y)(t) = \int_0^t x(s)\, y(t-s)\, ds$ si $t \geq 0$

$$\begin{cases} (x * y)(t) = \int_0^t e^{-s} e^{-(t-s)} ds = \int_0^t e^{-t} dt = t e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \\ = 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Alors, la TF de $t e^{-t}$ $= \underbrace{\frac{1}{(1 + 2i\pi\nu)}}_{\hat{x}(\nu)} \cdot \underbrace{\frac{1}{(1 + 2i\pi\nu)}}_{\hat{y}(\nu)} = \frac{1}{(1 + 2i\pi\nu)^2}$

On peut également retrouver ce résultat en utilisant le fait $t e^{-t} \longleftrightarrow -\frac{1}{2i\pi} \frac{d}{d\nu}\left(\frac{1}{1 + 2i\pi\nu}\right) = \frac{1}{(1 + 2i\pi\nu)^2}$

IV - 4 - bis. Identité de Parseval

$x(t)$, $y(t)$, ayant pour transformées de Fourier $\hat{x}(\nu)$ et $\hat{y}(\nu)$. Alors :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, y^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(\nu)\, \hat{y}^*(\nu)\, d\nu$$

Cas particulier $x(t) = y(t)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{x}(\nu)|^2\, d\nu$$

IV-5] Théorème d'inversion

Si $\hat{x}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-2i\pi\nu t}\, dt$, alors, $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(\nu)\, e^{2i\pi\nu t}\, d\nu$

(quelques hypothèses supplémentaires sont nécessaires).

$\boxed{\text{Important}}$: Interprétation physique du théorème d'inversion.

Si $x(t)$ est à valeurs réelles.

Transformer $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\nu)\, e^{2i\pi\nu t}\, d\nu$ en l'intégrale d'une fonction à valeurs réelles

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\nu)\, e^{2i\pi\nu t}\, d\nu = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \hat{x}(\nu)\, e^{2i\pi\nu t}\, d\nu}_{} + \int_{0}^{+\infty} \hat{x}(\nu)\, e^{2i\pi\nu t}\, d\nu$$

on pose $\mu = -\nu$

$$\int_{-\infty}^{0} \hat{x}(\nu)\, e^{+2i\pi\nu t}\, d\nu = \int_{+\infty}^{0} \hat{x}(-\mu)\, e^{-2i\pi\mu t}\, (-d\mu) = \int_{0}^{+\infty} \hat{x}(-\mu)\, e^{-2i\pi\mu t}\, d\mu$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\nu)\, e^{2i\pi\nu t}\, d\nu = \int_{0}^{+\infty} \left(\hat{x}(\nu)\, e^{2i\pi\nu t} + \hat{x}(-\nu)\, e^{-2i\pi\nu t} \right) d\nu$$

Comme $x(t) \in \mathbb{R}\ \forall t$, $\hat{x}(-\nu) = (\hat{x}(\nu))^*$

$$\Rightarrow \hat{x}(\nu)\, e^{2i\pi\nu t} + \hat{x}(-\nu)\, e^{-2i\pi\nu t} = 2\, \mathrm{Re}\left[\hat{x}(\nu)\, e^{2i\pi\nu t}\right]$$

On pose $\hat{x}(\nu) = |\hat{x}(\nu)|\, e^{i\varphi(\nu)}$, $\varphi(\nu) = \mathrm{Ang}\, \hat{x}(\nu)$

et $C(\nu) = \frac{1}{2}\, |\hat{x}(\nu)|$

$$\Rightarrow \left(\hat{x}(\nu)\, e^{2i\pi\nu t} + \hat{x}(-\nu) e^{-2i\pi\nu t}\right) = C(\nu)\, \cos(2\pi\nu t + \varphi(\nu)).$$

D'où finalement :

$$x(t) = \int_0^{+\infty} C(\nu)\, (\cos 2\pi\nu t + \varphi(\nu))\, d\nu$$

Peut être approximé par : $\sum_i (\nu_{i+1} - \nu_i)\, C(\nu_i)\, \cos(2\pi\nu_i t + \varphi) \simeq x(t)$

Cela signifie que le signal x peut être interprété comme étant une superposition de sinusoïdes dont les fréquences balayent (continument) l'intervalle $[0, +\infty[$.

En pratique, tous les signaux rencontrés dans la nature sont tels que $|\hat{x}(\nu)| = 0$ hors d'un intervalle $[B_1, B_2]$:

Donc :

$$x(t) = \int_{B_1}^{B_2} C(\nu) \cos(2\pi\nu t + \varphi(\nu))\, d\nu$$

~~Le si~~ $[B_1, B_2]$ = Bande passante du signal $x(t)$

= Plus petit intervalle en dehors duquel $\hat{x}(\nu) = 0$

<u>Exemple</u>

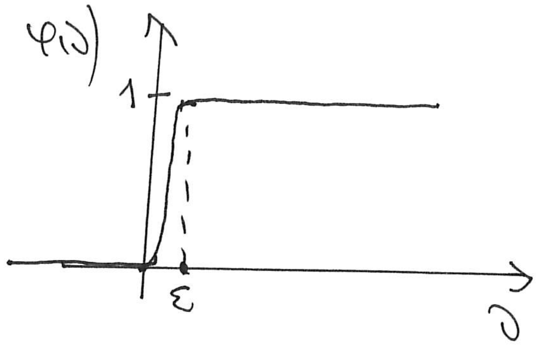
- $x(t)$ = Signal de parole $[B_1, B_2] = [50\,Hz, 4000\,Hz]$
- $x(t)$ = Signal de musique $[B_1, B_2] = [50\,Hz, 25.000\,Hz]$
- $x(t)$ = Signal envoyé par l'émetteur de la radio France Info :

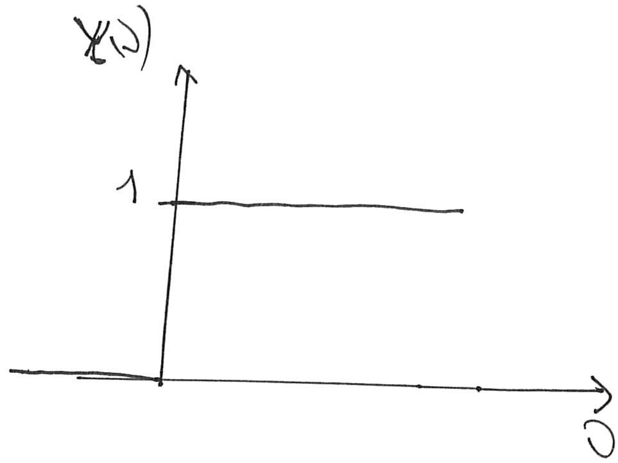
$[B_1, B_2] = [105.5\,MHz - 500\,kHz, 105.5\,MHz + 500\,kHz]$

IV-6] Transformée de Fourier des sinusoïdes

a] Impulsion de Dirac

Motivation



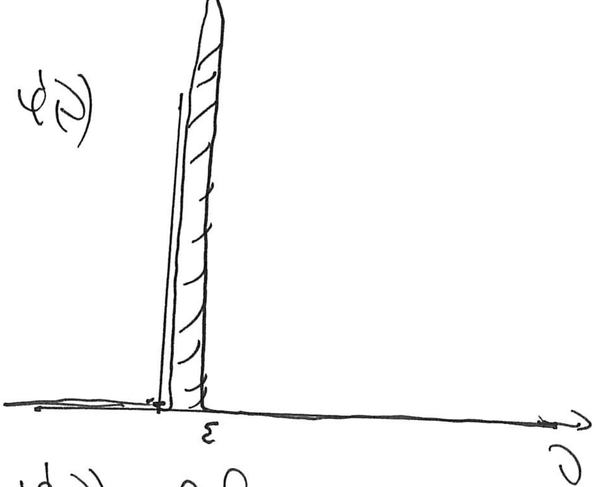


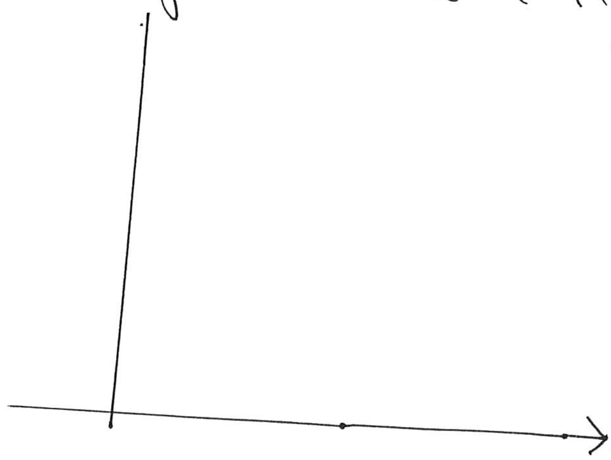
φ représente une phénomène de transition très bref entre 2 états

$$Y(\nu) = 1 \text{ si } \nu \geq 0$$
$$= 0 \text{ si } \nu < 0$$

Modèle mathématique pour φ

On a parfois envie, et la nécessité de gérer la dérivée de $\varphi(\nu)$





$\varphi'(\nu)$ a la forme d'une impulsion

$$\int \varphi'(\nu)\, d\nu = 1.$$

car $\int \varphi'(\nu)\, d\nu = \varphi(1) = 1$

Quel modèle mathématique pour $\varphi'(\nu)$, quand $\varepsilon \to 0$?

Impulsion de Dirac à $\nu = 0$, notée $\delta(\nu)$

$\delta(\nu)$ vérifie :

$$\begin{cases} \delta(\nu) = 0 \quad \text{si } \nu \neq 0 \\ \delta(0) = +\infty \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\nu)\, d\nu = 1 \end{cases}$$

Propriétés : $\varphi(\nu)\,\delta(\nu) = \varphi(0)\,\delta(\nu)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\nu)\,\delta(\nu)\,d\nu = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(0)\,\delta(\nu)\,d\nu = \varphi(0)$$

Impulsion de Dirac au point ν_0 : $\delta(\nu-\nu_0)$

$$\delta(\nu-\nu_0) = 0 \quad \text{si } \nu \neq \nu_0$$
$$= +\infty \quad \text{si } \nu = \nu_0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\nu-\nu_0)\,d\nu = 1$$

$$\varphi(\nu)\,\delta(\nu-\nu_0) = \varphi(\nu_0)\,\delta(\nu-\nu_0)$$

$$\int \varphi(\nu)\,\delta(\nu-\nu_0)\,d\nu = \varphi(\nu_0)$$

b) T.F. des sinusoïdes

$$\int \delta(\nu-\nu_0)\, e^{2i\pi\nu t}\, d\nu = e^{2i\pi\nu_0 t}$$

Suggère que $\delta(\nu-\nu_0)$ est la TF de $t \longrightarrow e^{2i\pi\nu_0 t}$

$$\int \frac{1}{2}\left(\delta(\nu-\nu_0) + \delta(\nu+\nu_0)\right) e^{2i\pi\nu t}\, d\nu = \frac{1}{2}\left(e^{2i\pi\nu_0 t} + e^{-2i\pi\nu_0 t}\right) = \cos 2\pi\nu_0 t$$