IV] 2 Théorèmes importants

IV-1] Théorème de la convergence dominée

Soit $(f_n(x))_{n\geq 1}$ une suite de fonctions définies sur (a,b) ((a,b) peut représenter un intervalle ouvert, fermé, semi-ouvert, avec bornes possiblement infinie) vérifiant $|f_n(x)| \leq g(x), \forall n \geq 1$, pour tout $x \in (a,b)$, où $g(x) \geq 0$ et telle que $\int_a^b g(x)\,dx < +\infty$. Alors si pour tout $x \in (a,b)$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$, la fonction f vérifie :

- $\int_a^b |f(x)|\,dx < +\infty$
- $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

Applications aux intégrales dépendant d'un paramètre.

On considère la fonction $\lambda \to I(\lambda)$ où $I(\lambda)$ est définie par :

$$I(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t,\nu)\, dt$$

On suppose que pour tout ν, $|h(t,\nu)| \leq g(t)$, avec $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, dt < +\infty$, et que pour tout t, $\nu \to h(t,\nu)$ est continue au point ν_0. Alors, $\nu \to I(\nu)$ est également continue au point ν_0

Si de plus $\nu \to h(t,\nu)$ est pour tout t continument dérivable, ~~alors~~ que $\left|\frac{\partial h(t,\nu)}{\partial \nu}\right| \leq \tilde{g}(t)$, $\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(t) < +\infty$, alors $\nu \to I(\nu)$ est aussi continument dérivable et

$$I'(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial h(t,\nu)}{\partial \nu}\, dt$$

Autrement dit, on peut intervertir intégration et dérivation

Preuve de la continuité de I au point ν_0

Il suffit de montrer que si $(\nu_n)_{n\geq 1}$ converge vers ν_0, alors $I(\nu_n)$ converge vers $I(\nu_0)$

$$I(\vartheta_n) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t,\vartheta_n)\, dt$$

On pose alors $f_n(t) = h(t,\vartheta_n)$, et on applique le théorème de la convergence dominée à la suite de fonctions $(f_n(t))_{n\geq 1}$.

- $|f_n(t)| = |h(t,\vartheta_n)| \leq g(t) \qquad \forall t,\ \forall n \geq 1$
- $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, dt < +\infty$

- Pour tout t, $\vartheta \to h(t,\vartheta)$ est continue en ϑ_0.

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} h(t,\vartheta_n) = h(t,\vartheta_0) \quad \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = h(t,\vartheta_0)$

Le théorème de la convergence dominée implique alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t,\vartheta_0)\, dt = I(\vartheta_0)$

Puisque que $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\, dt = I(\vartheta_n)$, on en déduit que

$\lim\limits_{n\to+\infty} I(\vartheta_n) = I(\vartheta_0) \quad \Rightarrow \quad I$ est continue au point ϑ_0

IV-2] Théorème de Fubini

Soit $f(x,y)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$, et vérifiant

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|\, dx\, dy < +\infty. \quad \text{Alors :}$$

pour tout y, $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x,y)|\, dx < +\infty$ $\left(\text{et donc, } \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx \text{ converge}\right)$

pour tout x, $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x,y)|\, dy < +\infty$ $\left|\text{ et donc, } \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy \text{ converge}\right|$

De plus, $\int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(x,y)|\, dx\right] dy < +\infty$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(x,y)|\, dy\right] dx < +\infty, \quad \text{et}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dx\right] dy = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dy\right] dx$$

V] L'exponentielle complexe

Définition Si $z = x + iy$, on définit e^z par :

$$e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

On constate alors que $|e^z| = e^x = e^{\mathrm{Re}\, z}$ et

$\mathrm{Arg}\, e^z = y = \mathrm{Im}\, z$.

. Propriétés

- $e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$

. Soit $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 \in \mathbb{C}$. Alors, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{\alpha x}$ vérifie :

$$\int_a^b e^{\alpha x}\, dx = \frac{1}{\alpha}\left(e^{\alpha x}\right)_a^b = \frac{1}{\alpha}\left(e^{\alpha b} - e^{\alpha a}\right)$$

comme dans le cas où $\alpha \in \mathbb{R}$.

De plus, $\frac{d}{dx}\left(e^{\alpha x}\right) = \alpha e^{\alpha x}$ comme dans le cas où $\alpha \in \mathbb{R}$.