3

Concept de bande passante d'un signal à temps continu

$x(t)$ signal à temps continu (fonction définie sur $\mathbb{R}$) à valeurs réelles.

$\hat{x}(\nu)$ transformée de Fourier de $x(t)$, $\hat{x}(\nu) = \int x(t)\, e^{-2i\pi\nu t}\, dt$

$\hat{x}(\nu) \cancel{\longrightarrow} X(\nu)$ ou $X(f)$

$$X(\nu) = \int x(t)\, e^{-2i\pi\nu t}\, dt$$

$$X(-\nu) = X^*(\nu)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\, e^{2i\pi\nu t}\, d\nu$$

$$x(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} X(\nu)\, e^{2i\pi\nu t}\, d\nu}_{\mu = -\nu} + \int_{0}^{\infty} X(\nu)\, e^{2i\pi\nu t}\, d\nu$$

$$x(t) = \int_{0}^{+\infty} X(-\mu)\, e^{-2i\pi\mu t}\, d\mu + \int_{0}^{\infty} X(\mu)\, e^{2i\pi\mu t}\, d\mu = \int_{0}^{+\infty} \Big(\underbrace{X(-\mu)\, e^{-2i\pi\mu t}}_{\left(X(\mu)\, e^{2i\pi\mu t}\right)^*} + X(\mu)\, e^{2i\pi\mu t} \Big)\, d\mu$$

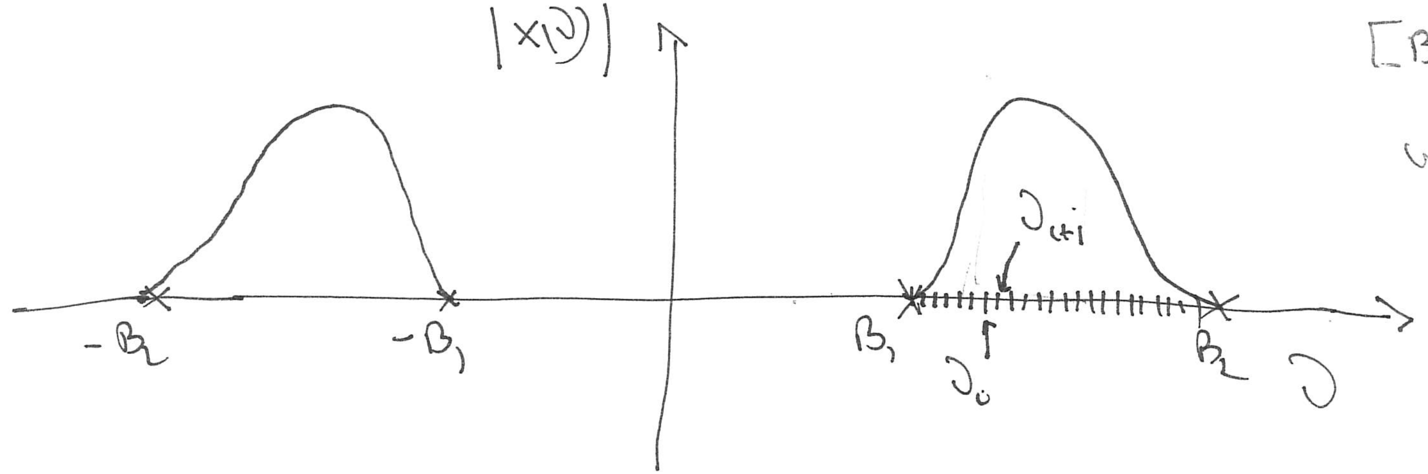
$$X(\nu) = \frac{c(\nu)}{2} e^{i\varphi(\nu)} \quad \text{avec} \quad c(\nu) > 0, \quad \left| \begin{array}{l} |X(\nu)| = \dfrac{c(\nu)}{2} \\ \varphi(\nu) = \operatorname{Arg} X(\nu) \end{array} \right.$$

$$x(t) = \int_0^\infty \left(X(\nu)\, e^{2i\pi\nu t} + X^*(\nu)\, e^{-2i\pi\nu t} \right) d\nu$$

$$= \int_0^\infty \underbrace{\left(\frac{1}{2} c(\nu)\, e^{i\varphi(\nu)}\, e^{2i\pi\nu t} + \frac{1}{2} c(\nu)\, e^{-i\varphi(\nu)}\, e^{-2i\pi\nu t} \right)}_{c(\nu)\, \underbrace{\frac{1}{2}\left(e^{2i\pi\nu t + i\varphi(\nu)} + e^{-(2i\pi\nu t + \varphi(\nu))} \right)}_{\cos(2\pi\nu t + \varphi(\nu))}} d\nu$$

$$x(t) = \int_0^\infty c(\nu) \cos\left(2\pi\nu t + \varphi(\nu)\right) d\nu \qquad c(\nu) = 2|X(\nu)|$$

En pratique, si $x(t)$ est un signal physique, $|X(\nu)|$ est numériquement non nul dans un intervalle $[B_1, B_2]$:



$[B_1, B_2]$ est le plus petit intervalle en dehors duquel $|X(\nu)|$ est numériquement nul

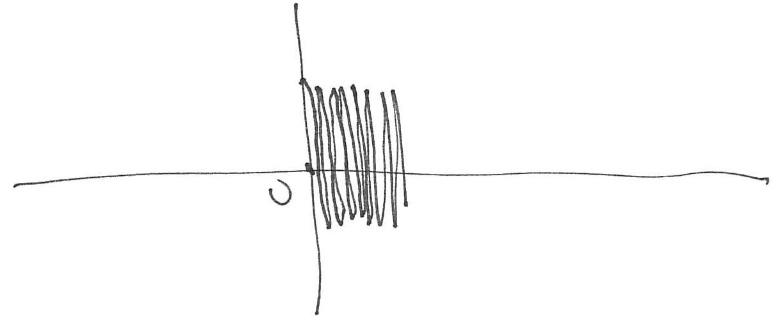
$[B_1, B_2]$ = Bande passante du signal $x(t)$

$c(\nu) = 2|X(\nu)|$, $c(\nu) = 0$ hors de $[B_1, B_2]$:

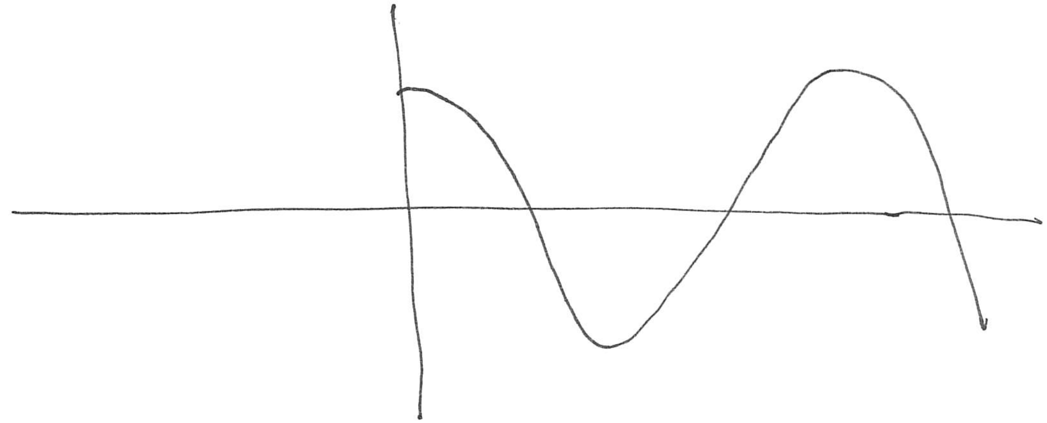
$$x(t) = \int_{B_1}^{B_2} c(\nu) \cos(2\pi\nu t + \varphi(\nu))\, d\nu \simeq \sum_i (\nu_{i+1} - \nu_i)\, c(\nu_i) \cos(2\pi\nu_i t + \varphi(\nu_i))$$

Le signal $x(t)$ peut être interprété comme une superposition de sinusoïdes dont les fréquences balayent continûment l'intervalle $[B_1, B_2]$.

Sinusoïde de grande fréquence



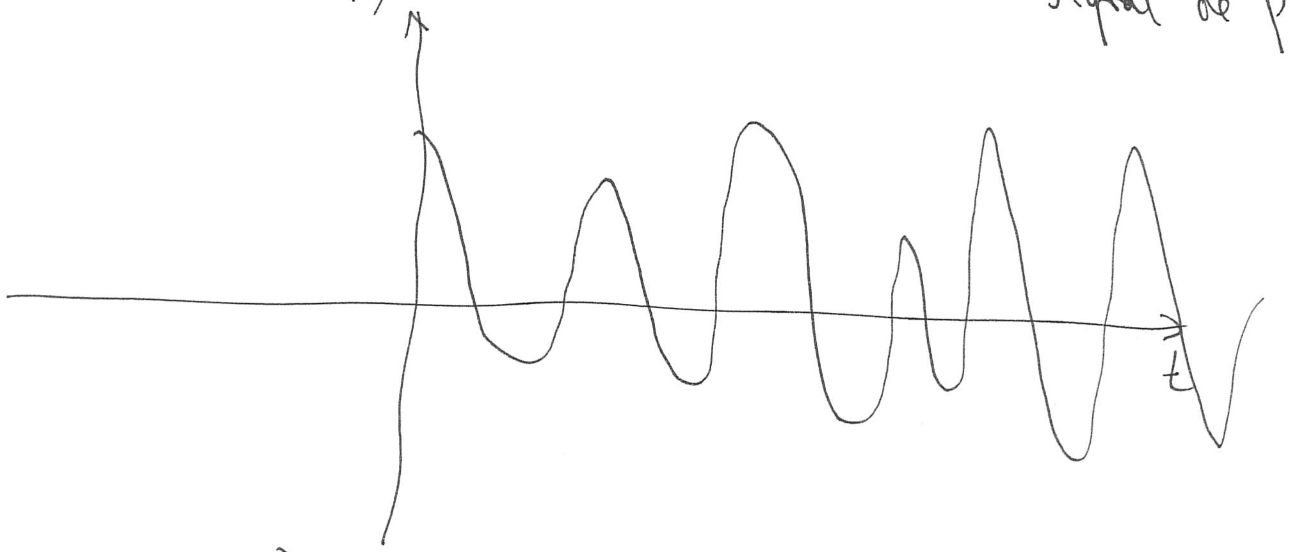
de petite fréquence

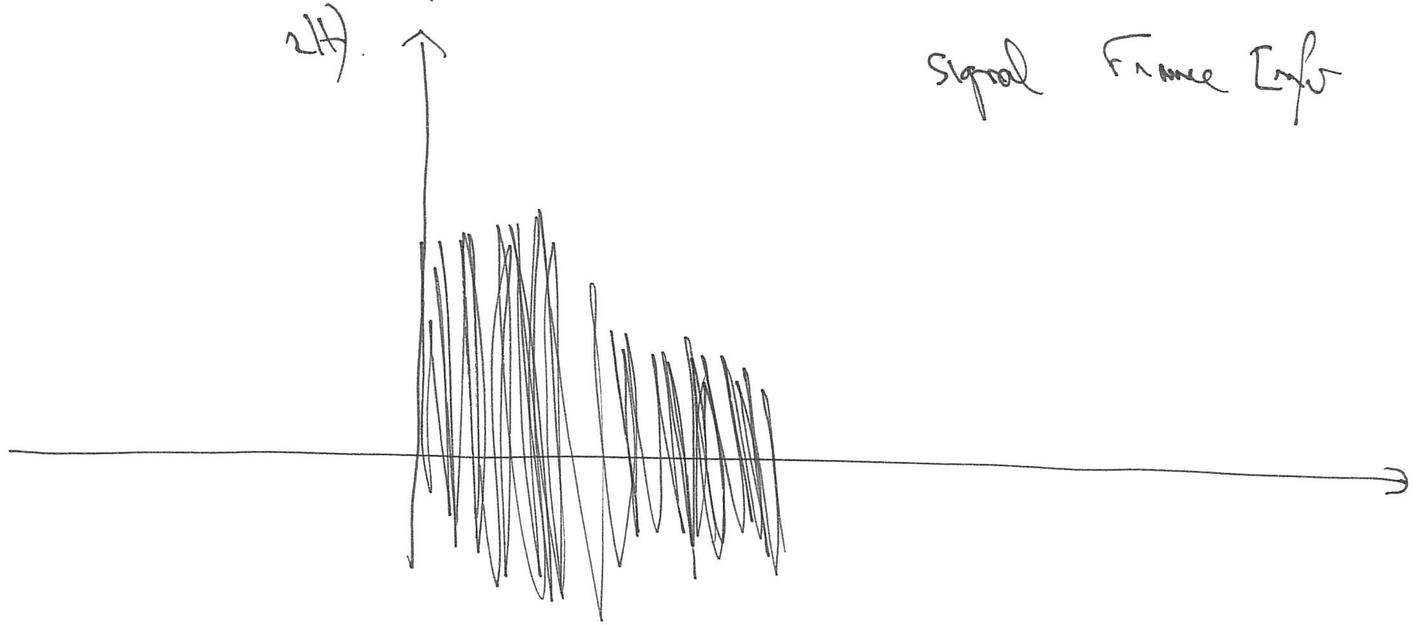


Exemples de bandes passantes de signaux physiques

- Le signal de parole : $[50\,Hz, 4000\,Hz]$ $\quad \frac{1}{4000} = \frac{1}{4} 10^{-3} = 0.25\ 10^{-3}$
- Le signal musical : $[50\,Hz, 25000\,Hz]$
- Le signal transmis par l'émetteur de France Info : $[105.5\,MHz - 1\,MHz, 105.5\,MHz + 1\,MHz]$
$= [104.5\,MHz, 106.5\,MHz]$

7





Retour sur la décomposition en série de Fourier des fonctions périodiques

$$x(t+T) = x(t) \Longrightarrow x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty}\left(a_m \cos\frac{2\pi m t}{T} + b_m \sin\frac{2\pi m t}{T}\right)$$

$$a_m = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\cos\frac{2\pi m t}{T}\,dt, \qquad b_m = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\sin\frac{2\pi m t}{T}\,dt$$

On pose alors $X_0 = \frac{a_0}{2}$, $\left\{ X_m = \frac{a_m + i b_m}{2} \right.$, $X_{-m} = X_m^* = \frac{a_m - i b_m}{2}$, $m \geq 1$

Alors, $$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X_m e^{-\frac{2i\pi m t}{T}}$$

Vérification : $m \geq 1$, $$X_m e^{-\frac{2i\pi m t}{T}} + X_{-m} e^{\frac{2i\pi m t}{T}} = 2\,\mathrm{Re}\left(\left(\frac{a_m + i b_m}{2}\right)\left(\cos\frac{2\pi m t}{T} - i\sin\frac{2\pi m t}{T}\right)\right)$$
$$= a_m \cos\frac{2\pi m t}{T} + b_m \sin\frac{2\pi m t}{T}$$

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} X_m e^{-\frac{2i\pi m t}{T}} = X_0 + \sum_{m=1}^{+\infty}\left(X_m e^{-\frac{2i\pi m t}{T}} + X_{-m} e^{\frac{2i\pi m t}{T}}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty}\left(a_m \cos\frac{2\pi m t}{T} + b_m \sin\frac{2\pi m t}{T}\right) = x(t)$$

On voit tout de suite que $X_m = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{\frac{T}{2}} x(t)\, e^{\frac{2i\pi m t}{T}}\,dt$

Formule sommatoire de Poisson

$$T_e \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} x(nT_e)\, e^{-2i\pi n f T_e} \right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} X\left(f - \frac{k}{T_e}\right)$$

$$Y(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} X\left(f - \frac{k}{T_e}\right)$$

- $f \to Y(f)$ est périodique de période $\frac{1}{T_e}$
- $f \to Y(f)$ possède une décomposition en série de Fourier.

$$Y\left(f+\frac{1}{T_e}\right) = Y(f) \quad \text{pour tout } f$$

$$Y\left(f+\frac{1}{T_e}\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} X\left(f+\frac{1}{T_e}-\frac{k}{T_e}\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} X\left(f-\frac{(k-1)}{T_e}\right) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} X\left(f-\frac{l}{T_e}\right) = Y(f)$$

$$l = k-1$$

$$Y(f) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} Y_m \, e^{-2i\pi m \frac{f}{\frac{1}{T_e}}} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} Y_m \, e^{-2i\pi m f T_e}$$

$$Y_m = T_e \, x(mT_e) \quad ?$$

$$Y_m = \frac{1}{\frac{1}{T_e}} \int_{-\frac{1}{2T_e}}^{\frac{1}{2T_e}} Y(f) \, e^{+2i\pi m f T_e} \, df = T_e \underbrace{\int_{-\frac{1}{2T_e}}^{\frac{1}{2T_e}} Y(f) \, e^{2i\pi m f T_e} \, df}_{\overset{?}{=} \, x(mT_e)}$$

8

$$\int_{-\frac{1}{2T_e}}^{\frac{1}{2T_e}} Y(f)\, e^{2i\pi m f T_e}\, df = \int_{-\frac{1}{2T_e}}^{\frac{1}{2T_e}} \underbrace{\left(\sum_{k} X\left(f-\frac{k}{T_e}\right)\right) e^{2i\pi m f T_e}}\, df$$

$$= \int_{-\frac{1}{2T_e}}^{\frac{1}{2T_e}} \left[\sum_{k} \left(X\left(f-\frac{k}{T_e}\right) e^{2i\pi m f T_e}\right)\right] df$$

$$= \sum_{k} \int_{-\frac{1}{2T_e}}^{\frac{1}{2T_e}} X\left(f-\frac{k}{T_e}\right) e^{2i\pi m f T_e}\, df$$

$$\boxed{z(mT_e) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\, e^{2i\pi m f T_e}\, df}$$

On pose $\left(\nu = f - \frac{k}{T_e}\right)$

$$e^{2i\pi m \nu T_e} \cdot e^{\overbrace{2i\pi m \frac{k}{T_e} T_e}^{1}}$$

$$\int_{-\frac{1}{2T_e}}^{\frac{1}{2T_e}} X\left(f-\frac{k}{T_e}\right) e^{2i\pi m f T_e}\, df = \int_{-\frac{1}{2T_e}-\frac{k}{T_e}}^{\frac{1}{2T_e}-\frac{k}{T_e}} X(\nu)\, \underbrace{e^{2i\pi m\left(\nu+\frac{k}{T_e}\right)T_e}}_{e^{2i\pi m \nu T_e}}\, d\nu$$

9

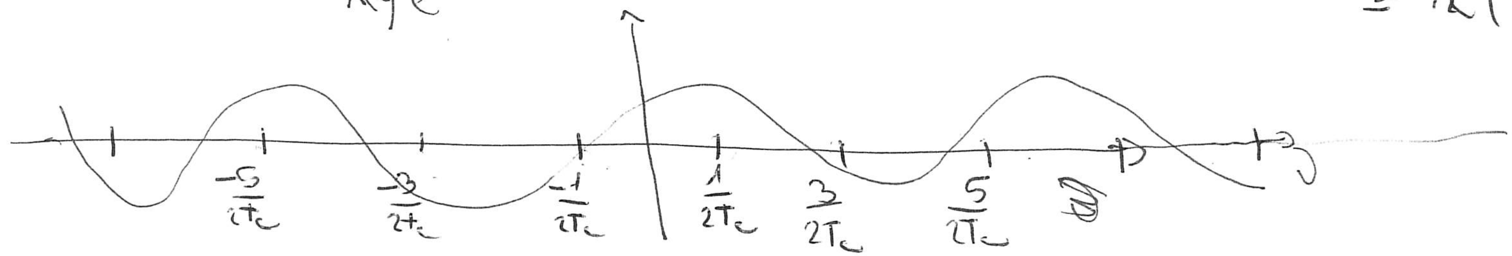
$$\int_{-\frac{1}{2T_e}}^{\frac{1}{2T_e}} X\left(f-\frac{k}{T_e}\right) e^{2i\pi n f T_e}\, df = \int_{-\frac{1}{2T_e}-\frac{k}{T_e}}^{\frac{1}{2T_e}-\frac{k}{T_e}} \left(X(\nu)\, e^{2i\pi n \nu T_e} \right) d\nu$$

$$\underbrace{\int_{-\frac{1}{2T_e}}^{\frac{1}{2T_e}} Y(f)\, e^{2i\pi n f T_e}\, df}_{\overset{?}{=}\, x(nT_e)} = \sum_k \int_{-\frac{1}{2T_e}}^{\frac{1}{2T_e}} X\left(f-\frac{k}{T_e}\right) e^{2i\pi n f T_e}\, df \quad \Bigg| \quad x(t) = \int X(\nu)\, e^{2i\pi \nu t}\, d\nu$$

$$= \sum_k \int_{-\frac{1}{2T_e}-\frac{k}{T_e}}^{\frac{1}{2T_e}-\frac{k}{T_e}} X(\nu)\, e^{2i\pi n \nu T_e}\, d\nu = \int_{\mathbb{R}} X(\nu)\, e^{2i\pi n \nu T_e}\, d\nu$$

$$= x(nT_e)$$

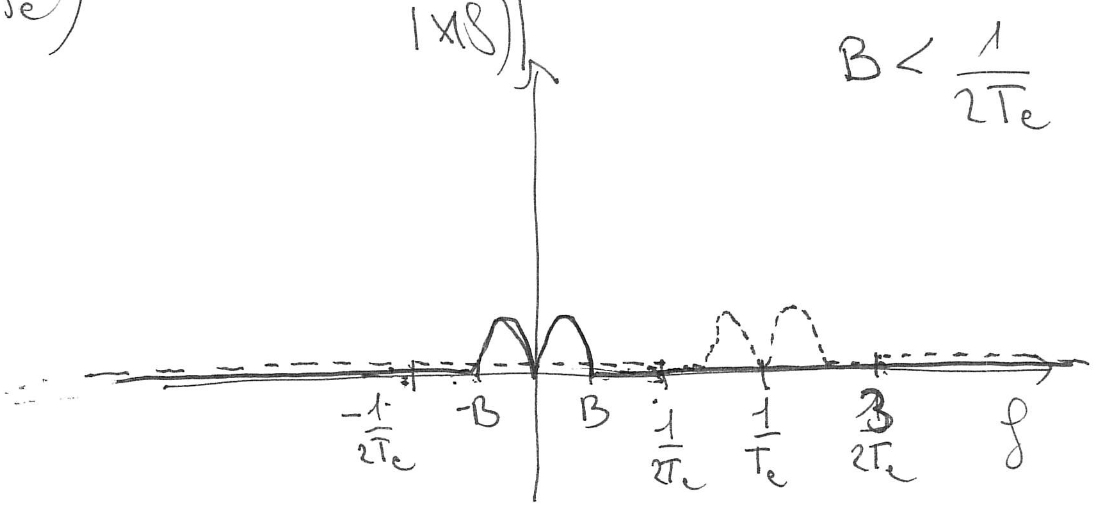
$X(\nu)\, e^{2i\pi n \nu T_e}$



$$Y(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} X\left(f - \frac{k}{T_e}\right)$$

$X(f) = 0$ si $|f| > \frac{1}{2T_e}$

$B < \frac{1}{2T_e}$



Si $f \in \left[-\frac{1}{2T_e}, \frac{1}{2T_e}\right]$, $\quad X\left(f - \frac{k}{T_e}\right) = 0$ si $\forall k \neq 0$

et $Y(f) = X(f)$

Vérification si $k = 1$. $\quad X\left(f - \frac{1}{T_e}\right) = 0$ si $f \in \left[-\frac{1}{2T_e}, \frac{1}{2T_e}\right]$

(11)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{2i\pi f t}\, df = \int_{-B}^{B} X(f)\, e^{2i\pi f t}\, df = \int_{-\frac{1}{2T_e}}^{\frac{1}{2T_e}} X(f)\, e^{2i\pi f t}\, df$$

$$= \int_{-\frac{1}{2T_e}}^{\frac{1}{2T_e}} Y(f)\, e^{2i\pi f t}\, df = \int_{-\frac{1}{2T_e}}^{\frac{1}{2T_e}} T_e\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} x(mT_e)\, e^{-2i\pi m f T_e}\right) e^{2i\pi f t}\, df$$

$$x(t) = \int_{-\frac{1}{2T_e}}^{\frac{1}{2T_e}} \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} T_e\, x(mT_e)\, e^{2i\pi f t}\, e^{-2i\pi m f T_e}\right) df = \sum_{m\in\mathbb{Z}} T_e\, x(mT_e)\, \underbrace{\int_{-\frac{1}{2T_e}}^{\frac{1}{2T_e}} e^{2i\pi f (t-mT_e)}\, df}_{\frac{\sin\left[\frac{\pi(t-mT_e)}{T_e}\right]}{\pi(t-mT_e)}}$$

$\underline{t \neq mT_e}$

$$\int_{-\frac{1}{2T_e}}^{\frac{1}{2T_e}} e^{2i\pi f (t-mT_e)}\, df = \frac{1}{2i\pi(t-mT_e)} \left[e^{2i\pi f (t-mT_e)} \right]_{-\frac{1}{2T_e}}^{\frac{1}{2T_e}}$$

$$= \frac{1}{2i\pi(t-mT_e)} \left[e^{\frac{i\pi}{T_e}(t-mT_e)} - e^{\frac{-i\pi}{T_e}(t-mT_e)} \right] = \frac{\sin \frac{\pi(t-mT_e)}{T_e}}{\pi(t-mT_e)}$$