1

$y_m = \lambda a_m + b_m$ $\qquad b_m = b_{1,m} + i\, b_{2,m}$

$b_{1,m}, b_{2,m}$ indépendantes de même loi $N(0, \frac{\sigma^2}{2})$

$$\sigma^2 = \frac{N_0}{T}$$

$$\lambda = \sum_{p=1}^{L} \mu_p e^{-2i\pi f_0 T_p} \qquad L \text{ "grand"}$$

$\theta_p = [-2\pi f_0 T_p]_{\text{mod } 2\pi}$ Il est raisonnable de supposer que les $(\theta_\ell)_{\ell=1,\dots,L}$ sont des réalisations indépendantes d'une variable aléatoire uniformément répartie sur $[0, 2\pi]$

$$\lambda = \sum_{p=1}^{L} \mu_p e^{i\theta_p}$$

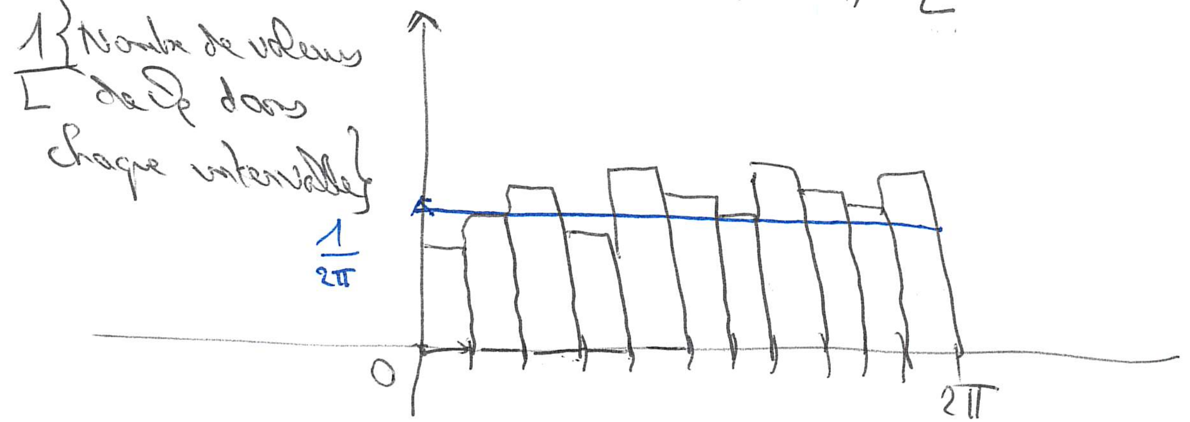
Valeurs typiques de $2\pi f_0 T_p$

$f_0 = 10^9\ Hz$

$$\theta_\ell - \theta_k = [2\pi f_0 (T_p - T_\ell)]_{\text{mod } 2\pi} \qquad T_\ell - T_k \ll T \qquad T_p - T_\ell \simeq 10^{-8}$$

(2)

Forme typique d'un histogramme des $(\theta_\ell)_{\ell=1,\dots,L}$



— graphe de la densité de probabilité de θ_ℓ loi uniforme sur $[0, 2\pi]$:

$p(\theta) = \frac{1}{2\pi}$ si $\theta \in [0, 2\pi]$

$= 0$ sinon

$$\lambda = \sum_{\ell=1}^{L} \mu_\ell \, e^{i\theta_\ell}$$

$(\theta_\ell)_{\ell=1,\dots,L}$ indépendantes uniforme sur $[0, 2\pi]$

$$\lambda_1 = \sum_{\ell=1}^{L} \mu_\ell \underbrace{\cos\theta_\ell}_{\substack{\downarrow \\ \text{i.i.d}}} \ , \quad \lambda_2 = \sum_{\ell=1}^{L} \mu_\ell \sin\theta_\ell$$

L grand $\Rightarrow \lambda_1 \sim$ gaussienne

$$E(\lambda_1) = \sum_{\ell=1}^{L} \mu_\ell \underbrace{E(\cos\theta_\ell)}_{0} = 0 . \quad E(\cos\theta) = \int_0^{2\pi} \cos\theta \times \frac{1}{2\pi} d\theta = 0$$

3

$$\lambda_1 = \sum_{\ell=1}^{L} \mu_\ell \cos\theta_\ell$$

$$E(\lambda_1^2) = E\left(\left[\sum_{\ell=1}^{L} \mu_\ell \cos\theta_\ell\right]^2\right) = E\left[\sum_{\ell=1}^{L}\sum_{\ell'=1}^{L} \mu_\ell \mu_{\ell'} \cos\theta_\ell \cos\theta_{\ell'}\right]$$

$$= \sum_{\ell=1}^{L}\sum_{\ell'=1}^{L} \mu_\ell \mu_{\ell'} E(\cos\theta_\ell \cos\theta_{\ell'}) = \sum_{\ell=1}^{L} \mu_\ell^2 E(\cos^2\theta_\ell) + \sum_{\ell\neq\ell'} \mu_\ell \mu_{\ell'} \underbrace{E(\cos\theta_\ell \cos\theta_{\ell'})}_{\underbrace{E(\cos\theta_\ell)E(\cos\theta_{\ell'})}_{0}}$$

$$E(\lambda_1^2) = \sum_{\ell=1}^{L} \mu_\ell^2 \underbrace{E(\cos^2\theta_\ell)}_{E\left(\frac{1+\cos 2\theta_\ell}{2}\right) = \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{L} \mu_\ell^2$$

$$\sigma^2 = \sum_{\ell=1}^{L} \mu_\ell^2 \qquad \lambda_1 : \mathcal{N}(0, \sigma^2/2)$$

$$\lambda_2 = \sum_{\ell=1}^{L} \mu_\ell \sin\theta_\ell \qquad \lambda_2 : \mathcal{N}(0, \sigma^2/2)$$

En plus, $E(\lambda_1\lambda_2) = \sum_{\ell=1}^{L} \mu_\ell^2 \underbrace{E(\sin\theta_\ell \cos\theta_\ell)}_{\frac{1}{2}E(\sin 2\theta_\ell) = 0} = 0$

$\lambda = \lambda_1 + i\,\lambda_2$

$\lambda_1, \lambda_2 \quad \mathcal{N}(0, \sigma^2/2)$

$E(\lambda_1\lambda_2) = 0$

$\Rightarrow$ λ_1 et λ_2 sont indépendantes

Conclusion

Il est raisonnable de modéliser λ sous la forme :

$\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ avec

λ_1, λ_2 indépendantes de même loi $N(0, \delta^2/2)$, $\delta^2 = \sum_\ell \mu_\ell^2$

$$y_n = \lambda a_n + b_n$$

On dit λ suit la loi $N_c(0, \sigma^2) \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \text{ avec} \\ \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ indépendantes,} \\ \text{de loi } N(0, \delta^2/2) \end{cases}$

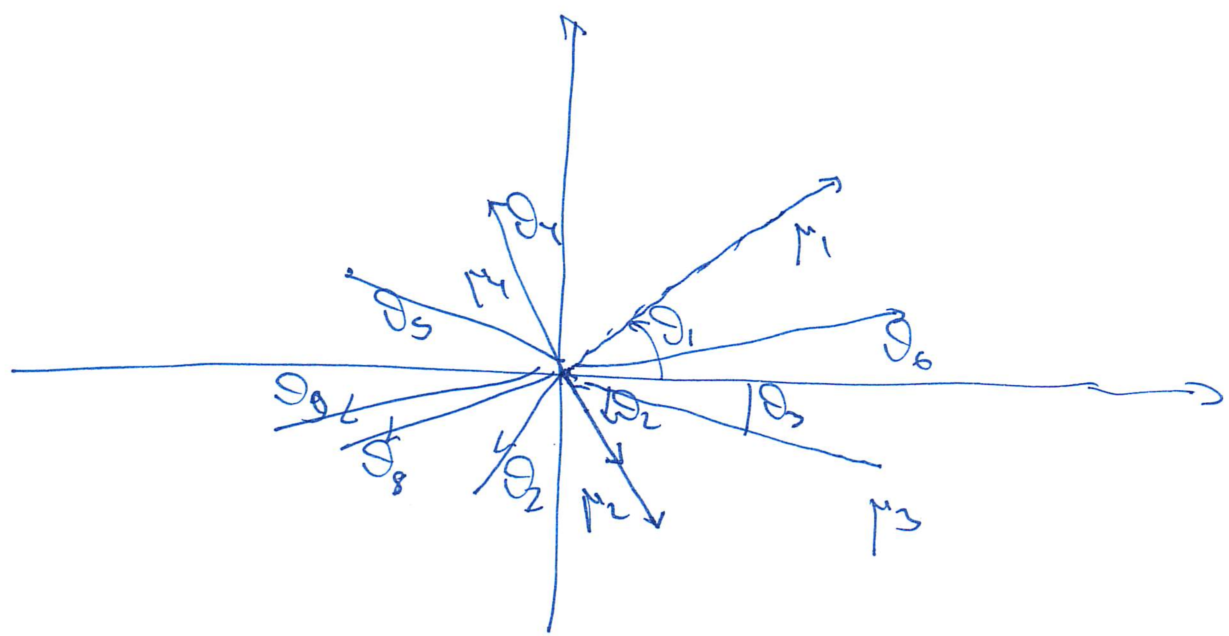
$$E|\lambda|^2 = E(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) = \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^2}{2} = \delta^2$$

$\Longleftrightarrow$ $\lambda = \delta . x$ où $x = x_1 + i x_2$ est une variable aléatoire $N_c(0, 1)$, x_1, x_2 sont indépendantes de loi $N(0, \frac{1}{2})$

$\lambda_1 = \delta x_1$, $x_1 : N(0, \frac{1}{2})$

$\lambda_2 = \delta x_2$

5



$$\lambda = \sum_{\ell=1}^{L} \mu_\ell e^{i\vartheta_\ell}$$

TLC : $X_1 \ldots X_L$ des variables aléatoires indépendantes de même loi, alors :

$$\sqrt{L}\left[\frac{1}{L}\sum_{\ell=1}^{L} X_\ell - E(X)\right] \sim N(0, \sigma^2)$$

$\sigma^2 = \cancel{E}$var des X_i

Si $E(X) = 0$

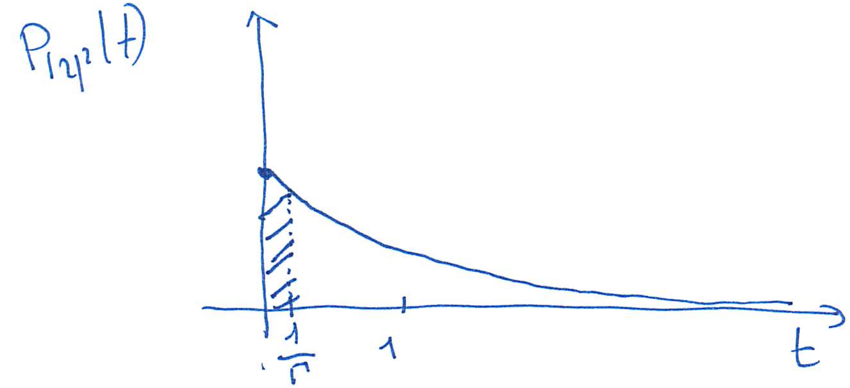
$$\frac{1}{\sqrt{L}}\sum_{\ell=1}^{L} X_\ell \sim N(0, \sigma^2)$$

6

$$|\lambda|^2 = \delta^2 |z|^2$$

$$|z|^2 = x_1^2 + x_2^2$$

La loi de probabilité de $|z|^2$: $t \longrightarrow e^{-t}$ si $t \geq 0$, 0 si $t < 0$ $\qquad E|z|^2 = 1$



$$y_m = \lambda a_m + b_m \qquad \sigma^2 = \frac{N_0}{T}$$

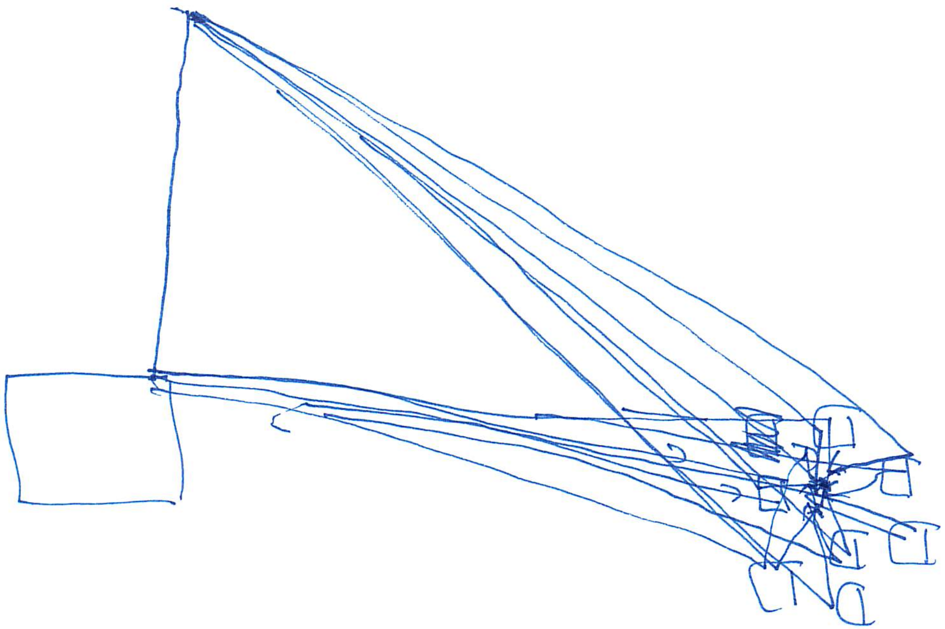
Rapport signal sur bruit "instantané" : $\dfrac{|\lambda|^2}{\sigma^2}$

$$\gamma = \frac{|\lambda|^2}{\sigma^2} = \underbrace{\frac{\delta^2}{\sigma^2}}_{\Gamma} \cdot |z|^2$$

$$P(\gamma < 1) = P\left(\Gamma |z|^2 < 1\right) = P\left(|z|^2 < \frac{1}{\Gamma}\right)$$

$$= \int_0^{\frac{1}{\Gamma}} P_{|z|^2}(t)\, dt. \text{ Si } \Gamma \text{ grand, } \frac{1}{\Gamma} \text{ petit} \simeq \frac{1}{\Gamma}$$

Cas de trajets multiples : diversité de trajets



Canal de Rayleigh à trajets multiples.

$$y(t) = \alpha_1 \, x(t-T_1) + \alpha_2 \, x(t-T_2) + b(t)$$

$|T_2 - T_1|$ de l'ordre de T

α_1, α_2 des variables aléatoires $N_c(0, \sigma_1^2)$ et $N_c(0, \sigma_2^2)$

α_1 et α_2 sont indépendantes

$$y_m = \sum_p h_p a_{m-p} + b_m \qquad h_\ell = \alpha_1 \, r(\ell T + T_1 - T_2) + \alpha_2 \, r(\ell T + T - T_2)$$

$$\begin{cases} y_{1,m} = \lambda_1 a_m + b_{1,m} \\ y_{2,m} = \lambda_2 a_m + b_{2,m} \end{cases}$$

λ_1, λ_2 indépendantes $\mathcal{N}_c(0, S^2)$

$b_{1,m}, b_{2,m}$ indépendantes $\mathcal{N}_c(0, \sigma^2)$

Solution optimale : $\lambda_1^* y_{1,m} + \lambda_2^* y_{2,m} = z_m$

$$z_m = \lambda_1^* (\lambda_1 a_m + b_{1,m}) + \lambda_2^* (\lambda_2 a_m + b_{2,m})$$

$$z_m = |\lambda_1|^2 a_m + \lambda_1^* b_{1,m} + |\lambda_2|^2 a_m + \lambda_2^* b_{2,m}$$

$$z_m = (|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2) a_m + b_m \qquad b_m = \lambda_1^* b_{1,m} + \lambda_2^* b_{2,m}$$

Rapport signal sur bruit instantané $\gamma = \dfrac{(|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2)^2}{\mathbb{E}|b_m|^2} = \dfrac{|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2}{\sigma^2} = \gamma_1 + \gamma_2$

$$\mathbb{E}|b_m|^2 = |\lambda_1|^2 \underbrace{\mathbb{E}|b_{1,m}|^2}_{\sigma^2} + |\lambda_2|^2 \underbrace{\mathbb{E}|b_{2,m}|^2}_{\sigma^2} \quad \text{car } \mathbb{E}(b_{1,m} b_{2,m}^*) = \text{[illegible]}$$

$$= \sigma^2 (|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2)$$

$$\gamma = \frac{|\lambda_1|^2}{\sigma^2} + \frac{|\lambda_2|^2}{\sigma^2} = \gamma_1 + \gamma_2$$

$$|\lambda_1|^2 = \delta^2 |z_1|^2 \qquad \Gamma = \frac{\delta^2}{\sigma^2}$$

$$|\lambda_2|^2 = \delta |z_2|^2$$

$$\gamma = \frac{\delta^2 |z_1|^2}{\sigma^2} + \frac{\delta^2 |z_2|^2}{\sigma^2} = \Gamma \left(|z_1|^2 + |z_2|^2 \right)$$

$$P_{er} = P(\gamma < 1) = P\left(|z_1|^2 + |z_2|^2 < \frac{1}{\Gamma}\right)$$

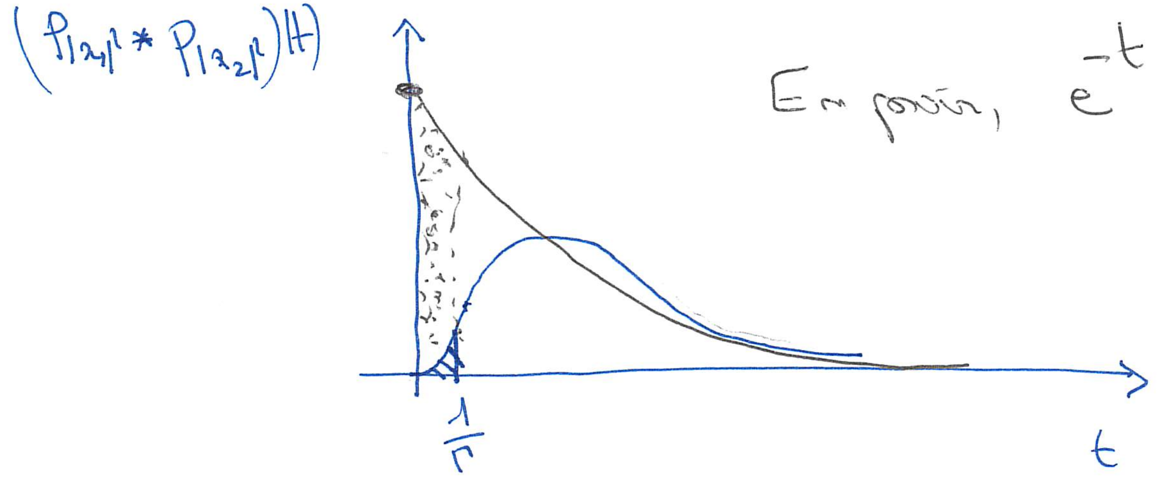
Quelle est la densité de probabilité de $|z_1|^2 + |z_2|^2$:

$$p_{|z_1|^2}(t) = p_{|z_2|^2}(t) = e^{-t} \text{ si } t \geq 0$$

λ_1 et λ_2 indépendantes $\Rightarrow$ z_1 et z_2 sont indépendantes $\Rightarrow |z_1|^2$ et $|z_2|^2$ sont indépendantes $\Rightarrow$ la densité de proba de $|z_1|^2 + |z_2|^2$: $\left(p_{|z_1|^2} * p_{|z_2|^2}\right)(t) =$
$t e^{-t}$ si $t \geq 0$

$$P_{ev} = P\left((|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2) < \frac{1}{\Gamma} \right) = \int_0^{\frac{1}{\Gamma}} t e^{-t} \, dt$$

Si Γ est grand, $e^{-t} \simeq 1$ si $t \in [0, \frac{1}{\Gamma}]$, $P_{ev} \simeq \int_0^{\frac{1}{\Gamma}} t \, dt = \frac{1}{2\Gamma^2}$



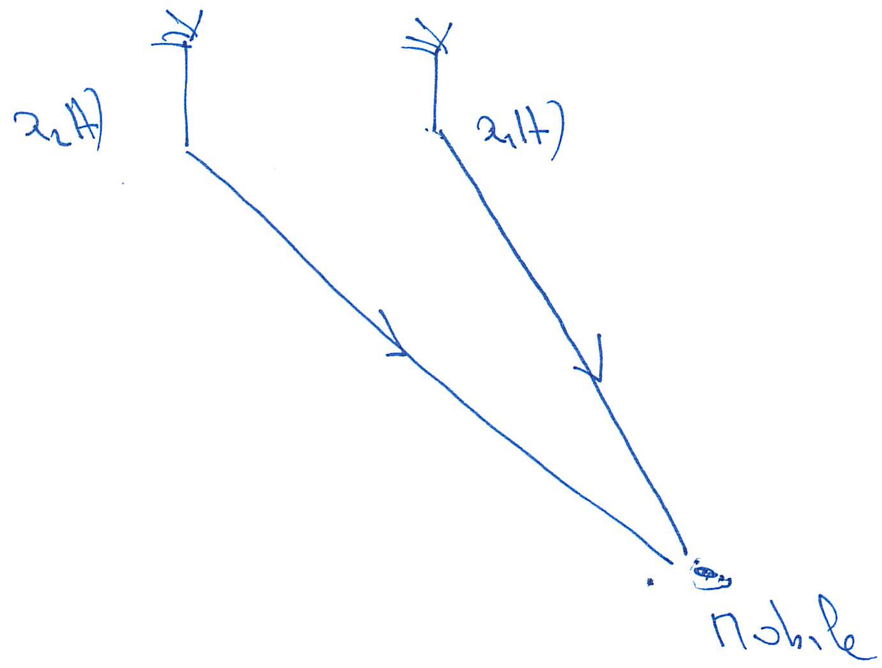
Si $\Gamma = 20\,dB \Rightarrow \Gamma = 10^2$,

$\Gamma^2 = 10^4$

$P_{ev} \simeq 0.5 \; 10^{-4}$

$$E(\gamma) = E(\gamma_1 + \gamma_2) = 2\Gamma.$$

Diversité spatiale en émission



$$y(t) = \alpha_1 \, x_1(t-\tau_1) + \alpha_2 \, x_2(t-\tau_2) + b(t)$$

$$\tau_1 \simeq \tau_2 \simeq \tau \qquad y(t) = \alpha_1 \, x_1(t-\tau) + \alpha_2 \, x_2(t-\tau) + b(t)$$

Hypothèse peu réaliste : l'émetteur connaît α_1 et α_2

$$x_1(t) = \frac{\alpha_1^*}{\sqrt{|\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2}} \, x(t) \qquad x_2(t) = \frac{\alpha_2^*}{\sqrt{|\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2}} \, x(t)$$

Puissance $x_1(t)$: $\dfrac{|\alpha_1|^2}{|\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2}$ Puissance de x_2 : $|\alpha_2|^2 / (|\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2)$

$$y(t) = \lambda_1 x_1(t-\tau) + \lambda_2 x_2(t-\tau) + b(t)$$

$$x_1(t) = \frac{\lambda_1^*}{\sqrt{|\lambda_1|^2+|\lambda_2|^2}} x(t) \qquad x_2(t) = \frac{\lambda_2^*}{\sqrt{|\lambda_1|^2+|\lambda_2|^2}} x(t)$$

$$y(t) = \frac{|\lambda_1|^2}{\sqrt{|\lambda_1|^2+|\lambda_2|^2}} x(t-\tau) + \frac{|\lambda_2|^2}{\sqrt{|\lambda_1|^2+|\lambda_2|^2}} x(t-\tau) + b(t)$$

$$y(t) = \sqrt{|\lambda_1|^2+|\lambda_2|^2}\, x(t-\tau) + b(t)$$

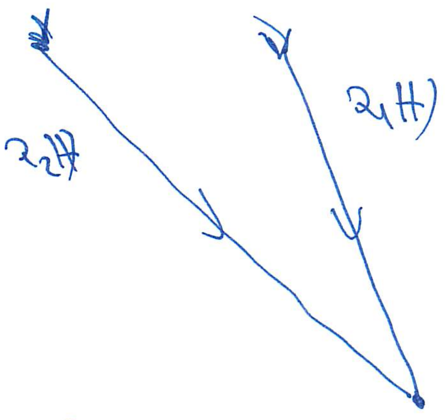
$$y_n = \sqrt{|\lambda_1|^2+|\lambda_2|^2}\, a_n + b_n$$

$$\gamma = \frac{|\lambda_1|^2+|\lambda_2|^2}{\sigma^2} = \gamma_1 + \gamma_2 \qquad \gamma_1 = \frac{|\lambda_1|^2}{\sigma^2}, \ \gamma_2 = \frac{|\lambda_2|^2}{\sigma^2}$$

Si l'émetteur connaissait λ_1 et λ_2, on aurait la même performance qu'avec 2 antennes de réception suffisamment éloignées

Sur chaque antenne d'émission, on va transmettre des suites de symboles bien choisies.

	Antenne 1	Antenne 2
$2m$	$\frac{1}{\sqrt{2}} a_{2m}$	$\frac{a_{2m+1}}{\sqrt{2}}$
$(2m+1)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} a^*_{2m+1}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} a^*_{2m}$



$$y(t) = \lambda_1 z_1(t-\tau) + \lambda_2 z_2(t-\tau) + b(t)$$

Sorties de filtres adapté aux instant $\tau + 2mT$ et $\tau + (2m+1)T$

$$\begin{cases} y_{2m} = \lambda_1 \cdot \frac{a_{2m}}{\sqrt{2}} + \lambda_2 \frac{a_{2m+1}}{\sqrt{2}} + b_{2m} \\ y_{2m+1} = \lambda_1 \cdot -\frac{1}{\sqrt{2}} a^*_{2m+1} + \frac{\lambda_2}{\sqrt{2}} a^*_{2m} + b_{2m+1} \end{cases}$$

$$y^*_{2m+1} = -\frac{\lambda_1^*}{\sqrt{2}} a_{2m+1} + \frac{\lambda_2^*}{\sqrt{2}} a_{2m} + b^*_{2m+1}$$