1

$$P_{i \to j} = P\left(\| \Lambda(a(i) - a(j)) + b_1 \|^2 < \| b_1 \|^2 \right)$$

$$\| c + d \|^2 = \| c \|^2 + \| d \|^2 + 2 c^T d$$

$$P_{i \to j} = P\left(\| b_1 \|^2 + \| \Lambda(a(i) - a(j)) \|^2 + 2 (a(i) - a(j))^T \Lambda b_1 < \| b_1 \|^2 \right)$$

$$= P\left((a(j) - a(i))^T \Lambda b_1 > \frac{1}{2} \| \Lambda(a(j) - a(i)) \|^2 \right)$$

$$(a(j) - a(i))^T \Lambda b_1 : \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{2} (a(j) - a(i))^T \Lambda \Lambda (a(j) - a(i))\right)$$

$$\mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{2} (a(j) - a(i))^T \Lambda^2 (a(j) - a(i))\right)$$

$$x^T b_1 = \sum_{k=1}^{N} x_k b_{1,k} \qquad E(x^T b_1)^2 = \underbrace{E(b_{1,1})^2}_{\sigma^2/2} \underbrace{\sum_{k=1}^{N} x_k^2}_{\|x\|^2}$$

$$x^T b : \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{2} \|x\|^2\right)$$

$$P\left((a(j)-a(i))^T \Lambda\, b_1 > \frac{1}{2} \underbrace{\| \Lambda (a(j)-a(i))\|^2}_{(a(j)-a(i))^T \Lambda^2 (a(j)-a(i))}\right)$$

$$P\left(\underbrace{\frac{(a(j)-a(i))^T \Lambda\, b_1}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2}(a(j)-a(i))^T \Lambda^2 (a(j)-a(i))}}} > \frac{1}{2} \frac{(a(j)-a(i))^T \Lambda^2\, a(j)-a(i)}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2}(a(j)-a(i))^T \Lambda^2 (a(j)-a(i))}}\right)$$

$$= P\left(N(0,1)^+ > \sqrt{\frac{(a(j)-a(i))^T \Lambda^2 (a(j)-a(i))}{2\sigma^2}}\right)$$

$$= Q\left(\sqrt{\frac{(a(j)-a(i))^T \Lambda^2 (a(j)-a(i))}{2\sigma^2}}\right)$$

$$= Q\left(\sqrt{\frac{2(c(j)-c(i))^T \Lambda^2 (c(j)-c(i))}{\sigma^2}}\right)$$

$$a(j) = 2c(j) - \begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

$$a(i) = 2c(i) - \begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

$$a(j)-a(i) = 2(c(j)-c(i))$$

$$\left(c(j) - c(l)\right) \Lambda^2 \left(c(j) - c(l)\right)^T$$

$$\left(c_1(j) - c_1(l), \dots, c_N(j) - c_N(l)\right) \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & |\lambda_N|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(j) - c_1(l) \\ \vdots \\ c_N(j) - c_N(l) \end{pmatrix}$$

$$\left(c_1(j) - c_1(l), \dots, c_N(j) - c_N(l)\right) \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 (c_1(j) - c_1(l)) \\ |\lambda_2|^2 (c_2(j) - c_2(l)) \\ \vdots \\ |\lambda_N|^2 (c_N(j) - c_N(l)) \end{pmatrix}$$

$$= |\lambda_1|^2 \left(c_1(j) - c_1(l)\right)^2 + |\lambda_2|^2 \left(c_2(j) - c_2(l)\right)^2 + \dots + |\lambda_N|^2 \left(c_N(j) - c_N(l)\right)^2$$

$$E\left(\frac{1}{2}\prod_{m=1}^{N}\exp-\frac{|\lambda_m|^2}{\sigma^2}\left(c_m(j)-c_m(i)\right)^2\right)\cancel{\geq}\,\overline{P}_{i\to j}$$

$\lambda_1,\dots,\lambda_N$ sont indépendantes entre elles λ_m sont $N_c(0,\delta^2)$

$\lambda_m=\delta\, z_m$, avec $z_m : N_c(0,1)$

$$\overline{P}_{i\to j}\leq E\left(\frac{1}{2}\prod_{m=1}^{N}\exp-\frac{\delta^2}{\sigma^2}|z_m|^2\left(c_m(j)-c_m(i)\right)^2\right)\qquad \Gamma=\frac{\delta^2}{\sigma^2}$$

$$\leq\frac{1}{2}E\left(\prod_{m=1}^{N}\exp-\Gamma\left(c_m(j)-c_m(i)\right)^2|z_m|^2\right)$$

$z_1,\dots,z_N$ sont indépendantes

$$\overline{P}_{i\to j}\leq\frac{1}{2}\prod_{m=1}^{N}\left(\underbrace{E\left(\exp-\Gamma\left(c_m(j)-c_m(i)\right)^2|z_m|^2\right)}\right)$$

$|z_m|^2$: densité de probabilité $p_{|z_m|^2}(t)=e^{-t}$ si $t\geq 0$, $=0$ si $t<0$

$$\int_0^{\infty}\exp-\Gamma\left(c_m(j)-c_m(i)\right)^2t\cdot\exp-t\,dt$$

$$=\int_0^{\infty}\exp\left[-\left(1+\Gamma\left(c_m(j)-c_m(i)\right)^2\right)t\right]dt=\frac{1}{1+\Gamma\left(c_m(j)-c_m(i)\right)^2}$$

5

$$\overline{P}_{i \to j} \leq \frac{1}{2} \prod_{m=1}^{N} \frac{1}{\left(1+\Gamma\,(c_m(j)-c_m(i))^2\right)} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\left(1+\Gamma\right)^{d(c(j),\,c(i))}}$$

$$(c_m(j)-c_m(i))^2 = 0 \quad \text{si} \quad c_m(j) = c_m(i)$$

$$(c_m(j)-c_m(i))^2 = 1 \quad \text{si} \quad c_m(j) \neq c_m(i)$$

$$\overline{P}_{i \to j} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\Gamma}\right)^{d(c(j),\,c(i))} \leq \frac{1}{2}\,\frac{1}{\Gamma^{d_{min}}}$$

$$b = (b_1 \cdots b_K) \rightarrow c = (c_1 \cdots c_N) \rightarrow a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & a_{N+1} & a_{2N+1} & \cdots & a_{MN+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_N & a_{2N} & a_{3N} & & a_{(M+1)N} \end{array} \qquad N \times (M+1)$$

$$x(t) = \sum_{1}^{N} a_m g(t-mT) \qquad \sum_{N+1}^{2N} a_m g(t-mT) \qquad \sum_{MN+1}^{(M+1)N} a_m g(t-mT)$$

$$a_1, \cdots a_N, a_{N+1} \cdots a_{2N}, \cdots \cdots a_{MN+1} \cdots a_{(M+1)N}$$

$$\sigma : [1, (M+1)N] \rightarrow [1, (M+1)N]$$

$$a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \cdots \cdots a_{\sigma(MN+1)} \cdots a_{\sigma((M+1)N)}$$

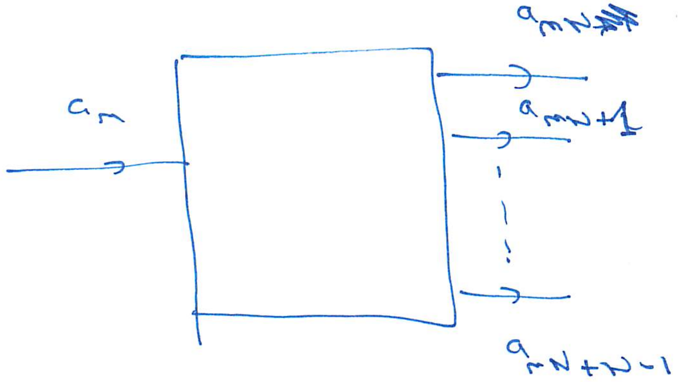
$$x(t) = \sum_{1}^{(M+1)N} a_{\sigma(m)} g(t-mT)$$

$$y_m = \lambda_m a_{\sigma(m)} + b_m$$

$$y_{\sigma^{-1}(m)} = \lambda_{\sigma^{-1}(m)} a_m + b_{\sigma^{-1}(m)}$$

Si $\forall m$, $\sigma^{-1}(m) - \sigma^{-1}(m+1)$ est grand, $\lambda_{\sigma^{-1}(m)}$ et $\lambda_{\sigma^{-1}(m+1)}$ sont à peu près indépendants.

$a_n \rightarrow$ (a_n) fonctionne au débit $\frac{1}{T}$.



Transmettre $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ au débit $\frac{1}{T}$

$\Longleftrightarrow$ Transmettre $(a_{nN})_{n\in\mathbb{Z}}$ au débit $\frac{1}{NT}$,

$(a_{nN+1})_{n\in\mathbb{Z}}$ au débit $\frac{1}{NT}$, ..., $(a_{nN+N-1})_{n\in\mathbb{Z}}$ au débit $\frac{1}{NT}$

$N = 4$

$a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \qquad a_4 \quad a_5 \quad a_6 \quad a_7 \qquad a_8 \quad a_9 \quad a_{10} \quad a_{11}$

a_0	a_4	a_8	$\frac{1}{4T}$
a_1	a_5	a_9	$\frac{1}{4T}$
a_2	a_6	a_{10}	$\frac{1}{4T}$
a_3	a_7	a_{11}	$\frac{1}{4T}$

En modulation linéaire : $x(t) = \sum_n a_n g(t-nT)$

où $g(t)$ a pour bande passante à peu près $\left[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}\right]$

On a à notre disposition une bande de $\frac{1}{T}$.

8

$(a_{mN})_{m\in\mathbb{Z}} \longrightarrow x_0(t) = \sum_m a_{mN}\, g_0(t - mNT)$

bande passante de $g_0(t)$: $\left[0, \frac{1}{NT}\right]$

$(a_{mN+1})_{m\in\mathbb{Z}} \longrightarrow x_1(t) = \sum_m a_{mN+1}\, g_1(t - mNT)$

bande passante de $g_1(t)$: $\left[\frac{1}{NT}, \frac{2}{NT}\right]$

⋮

$(a_{mN+N-1})_{m\in\mathbb{Z}} \longrightarrow x_{N-1}(t) = \sum_m a_{mN+N-1}\, g_{N-1}(t - mNT)$

bande passante de $g_{N-1}(t)$: $\left[\frac{(N-1)}{NT}, \frac{1}{T}\right]$

$x(t) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k(t)$

Bande passante totale : un peu plus grand que $\frac{1}{T}$: $\left[0, \frac{(1+\gamma)}{T}\right]$

$0 < \gamma < 1$