1

$$r(\tau) = \frac{1}{T} \int g(t+\tau)\, g(t)\, dt$$

$$h(t) = \frac{1}{T}\, g(-t)$$

$$r(\tau) = (g * h)(\tau)$$

Vérification :

$$(g * h)(\tau) = \int g(t)\, h(\tau - t)\, dt$$

$$h(\tau - t) = \frac{1}{T}\, g(t-\tau)$$

$$(g * h)(\tau) = \frac{1}{T} \int g(t)\, g(t-\tau)\, dt$$

$$t \longrightarrow t+\tau$$

$$\frac{1}{T}\, G(-f) = \frac{1}{T}\, G^*(f)$$

$$= \frac{1}{T} \int g(t+\tau)\, g(t)\, dt$$

$$R(f) = G(f)\, \underbrace{H(f)}_{\frac{1}{T}(G(f))^*} \qquad H(f) = \frac{1}{T} \int h(t)\, e^{-2i\pi f t}\, dt$$

$$= \frac{1}{T}|G(f)|^2 \qquad = \frac{1}{T} \int g(-t)\, e^{-2i\pi f t}\, dt = \boxed{\frac{1}{T} \int g(t)\, e^{2i\pi f t}\, dt}$$

Formule de Poisson

$x(t)$ signal quelconque :

$$T_e \sum_n x(nT_e)\, e^{-2i\pi n f T_e} = \sum_k X\left(f - \frac{k}{T_e}\right)$$

Application à $\begin{cases} x(t) = r(t) \\ T_e = T \end{cases}$ $\quad R(f) = \frac{1}{T}|G(f)|^2$

$$T \sum_n r(nT)\, e^{-2i\pi n f T} = \sum_k R\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

$$= \frac{1}{T} \sum_k \left|G\left(f - \frac{k}{T}\right)\right|^2$$

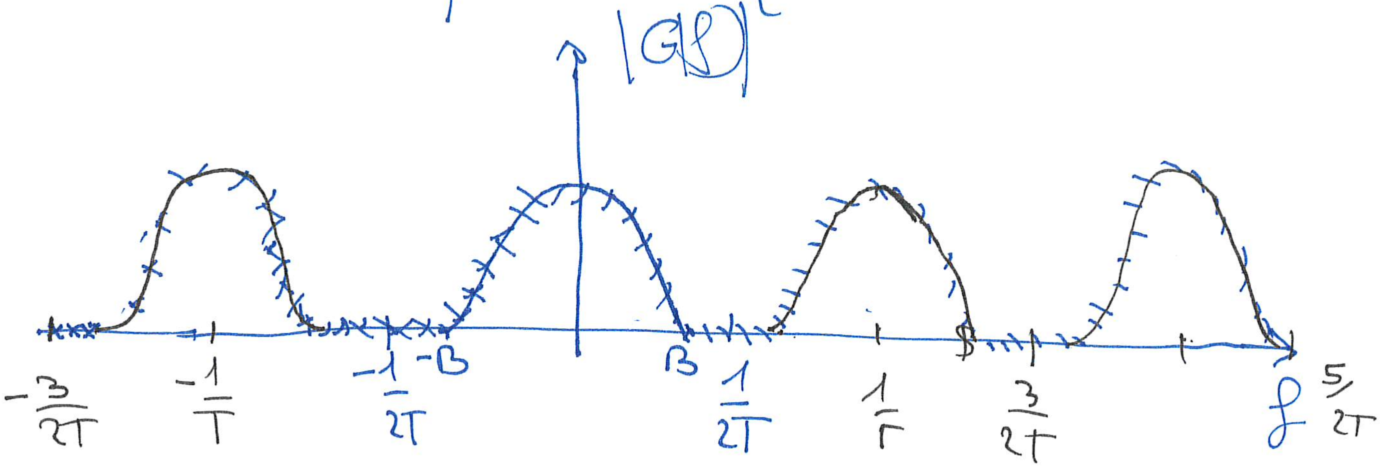
Si $r(nT) = \delta_n$

$$T \sum_n r(nT)\, e^{-2i\pi n f T} = T$$

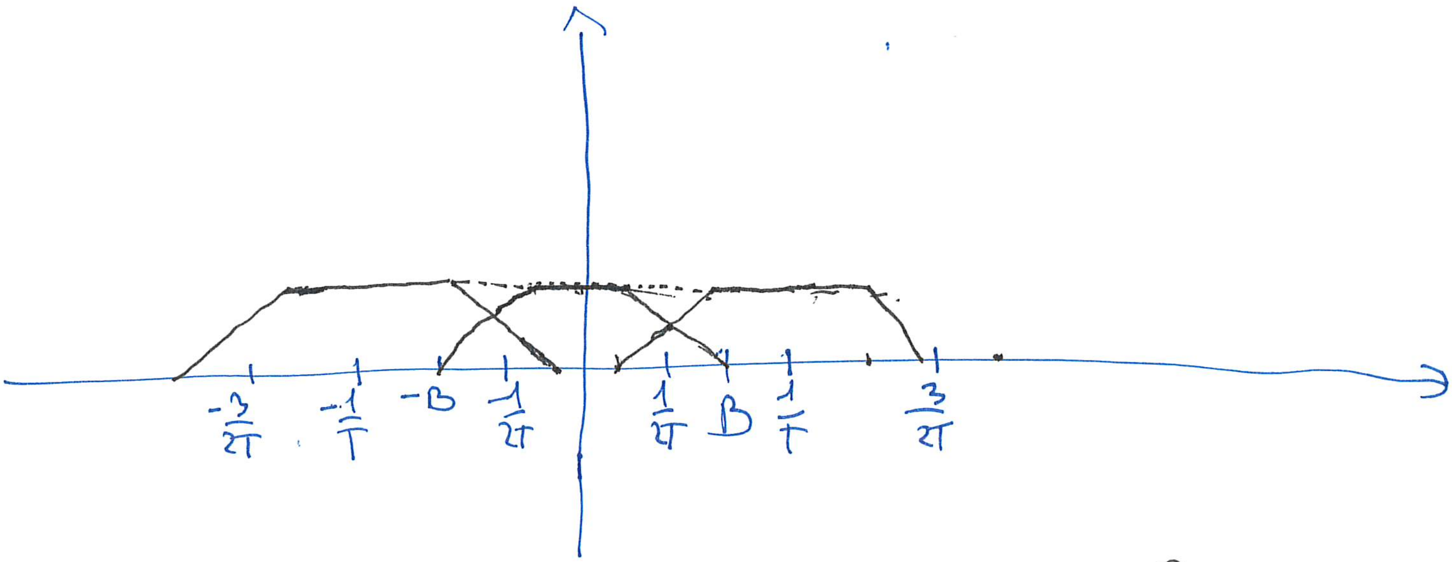
$$\Rightarrow \sum_k \left|G\left(f - \frac{k}{T}\right)\right|^2 = T^2$$

Ceci n'est possible que si la bande passante $[-B, B]$ de $g(t)$ contient $\left[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}\right]$

Supposons que $[-B, B]$ ne contienne pas $\left[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}\right]$



Alors, $\sum_{k} \left|G\left(f-\frac{k}{T}\right)\right|^2$ n'est une fonction constante. Pour que la condition de Nyquist soit respectée il faut que :

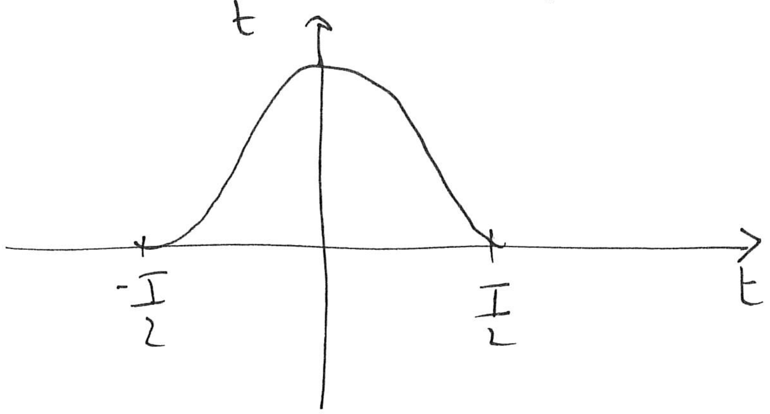


Il faut que $\left[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}\right] \subset [-B, B]$

Exemples de filtres vérifiant la condition de Nyquist

$g(t) = 1$ si $t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$

Plus généralement, si $g(t) = 0$ hors de $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$



$\forall k$ entier non nul, $g(t+kT)\,g(t) = 0 \quad \forall t$

mais, $g(t)$ n'est pas à bande limitée $\Rightarrow$

en théorie, $g(t)$ est de bande passante infinie

$$g(t) = \frac{\sin \frac{\pi t}{T}}{\frac{\pi t}{T}} \qquad G(f) = 1 \text{ si } f \in \left[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}\right]$$

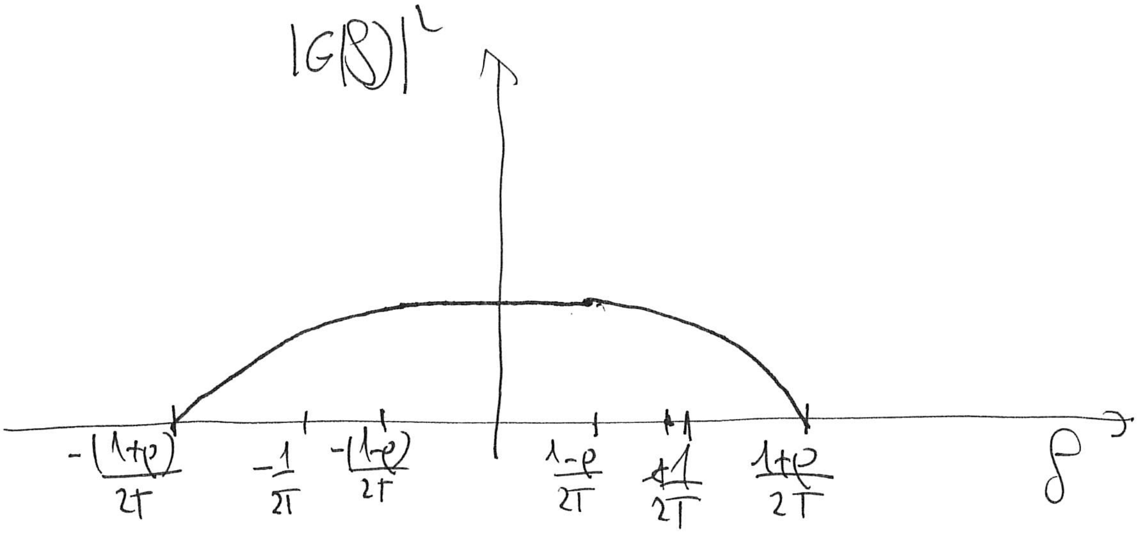
$$= 0 \text{ sinon}$$

$$\sum_k \left|G\left(f - \frac{k}{T}\right)\right|^2 = 1 \quad \forall f$$

$$g(t) = \frac{4\rho}{\pi\sqrt{T}} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi(1+\rho)t}{T}\right) + \frac{\sin\left(\frac{\pi(1-\rho)t}{T}\right)}{\frac{4\rho t}{T}}}{1-\left(\frac{4\rho t}{T}\right)^2} \right]$$

$\rho \in]0, 1]$ facteur d'excès de bande.

$$G(f) = 0 \quad \text{si} \quad |f| > \frac{1+\rho}{2T}$$



Longueur de la bande passante de $g(t)$: $\frac{1+\rho}{T} = \frac{1}{T} + \frac{\rho}{T}$

Quelle valeur de ρ ?

Compromis : prendre ρ petit est favorable car la bande passante de $g(t)$, donc de $r(t)$, n'est pas trop grande. Mais c'est aussi défavorable car $g(t)$ tend vers 0 doucement, et cela pose des problèmes de mise en oeuvre.

Mise en œuvre de la mise en forme

Comment générer en pratique $x(t) = \sum_{m=0}^{N-1} a_m g(t-mT)$?

$g(t)$: bande passante $\left[-\frac{(1+\rho)}{2T}, \frac{1+\rho}{2T}\right]$, $0<\rho<1$

On génère $x(mT_e)$, où T_e est choisie pour vérifier la condition de Shannon, et on génère $x(t)$ en faisant passer $(x(mT_e))$ dans 1 convertisseur numérique analogique.

Que doit vérifier T_e pour que la condition de Shannon soit respectée ?

$B = \frac{1+\rho}{2T}$ $\qquad T_e < \frac{1}{2B} = \frac{2T}{2(1+\rho)} = \frac{T}{1+\rho}$

On prend $T_e = \frac{T}{2} \leq \frac{T}{1+\rho}$ car $0<\rho\leq 1$

$$x\left(\frac{kT}{2}\right) = \sum_m a_m \, g\left(\frac{kT}{2} - mT\right)$$

On veut générer $x\left(\frac{kT}{2}\right) = \sum_m a_m \, g\left(\frac{kT}{2} - mT\right)$

- $x(kT)$ et les $x\left(kT + \frac{T}{2}\right)$

$$x(kT) = \sum_m a_m \, g(kT - mT) = \sum_m a_m \, g_1(k-m)$$

$$g_1(n) = g(nT) \qquad = \sum_\ell g_1(\ell) \, a_{m-\ell}$$

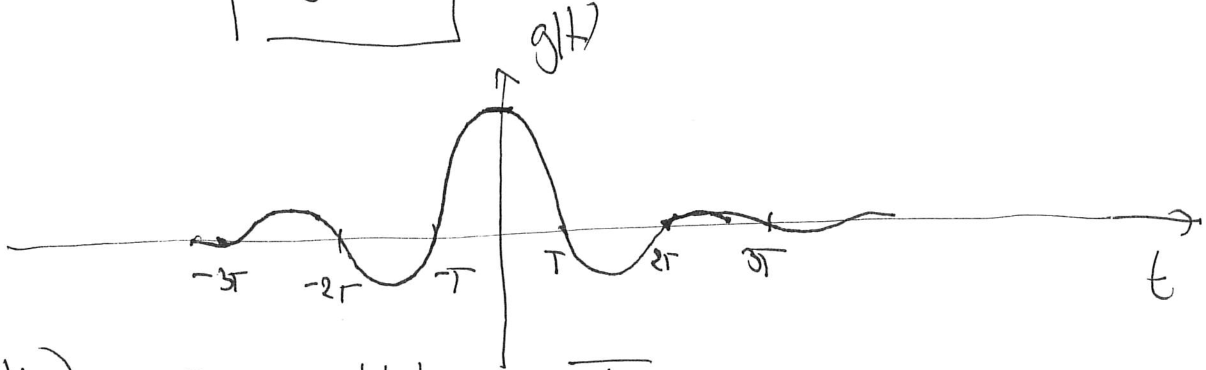
$$a_m \longrightarrow \boxed{g_1} \longrightarrow x(kT)$$

$$g_2(n) = g\left(nT + \frac{T}{2}\right)$$

$$x\left(kT + \frac{T}{2}\right) = \sum_m a_m \, g\left(kT + \frac{T}{2} - mT\right)$$

$$= \sum_m a_m \, g_2(m-\ell) = \sum_\ell g_2(\ell) \, a_{m-\ell}$$

$$a_m \longrightarrow \boxed{g_2} \longrightarrow x\left(kT + \frac{T}{2}\right)$$



$g(t) \simeq 0$ si $|t| \geq m_0 T$

Mise en oeuvre du filtrage adapté

$$y_m = \frac{1}{T}\int y(t)\, g(t-mT)\, dt$$

<u>Résultat</u> :

Si $z_1(t)$ et $z_2(t)$ 2 signaux de bande passante $[-B, B]$, et $T_e < \frac{1}{2B}$, alors

$$\int z_1(t)\, z_2(t)\, dt = T_e \sum_m z_1(mT_e)\, z_2(mT_e)$$

Application $z_1(t) = y(t)$, $z_2(t) = \frac{1}{T} g(t-mT)$

$B = \frac{1+\rho}{2T}$, $0 < \rho \leq 1$

$$y_m = \frac{1}{T}\int y(t)\, g(t-mT)\, dt = \frac{T_e}{T} \sum_{m} y(mT_e)\, g(mT_e - mT)$$

$T_e = \frac{T}{2}$

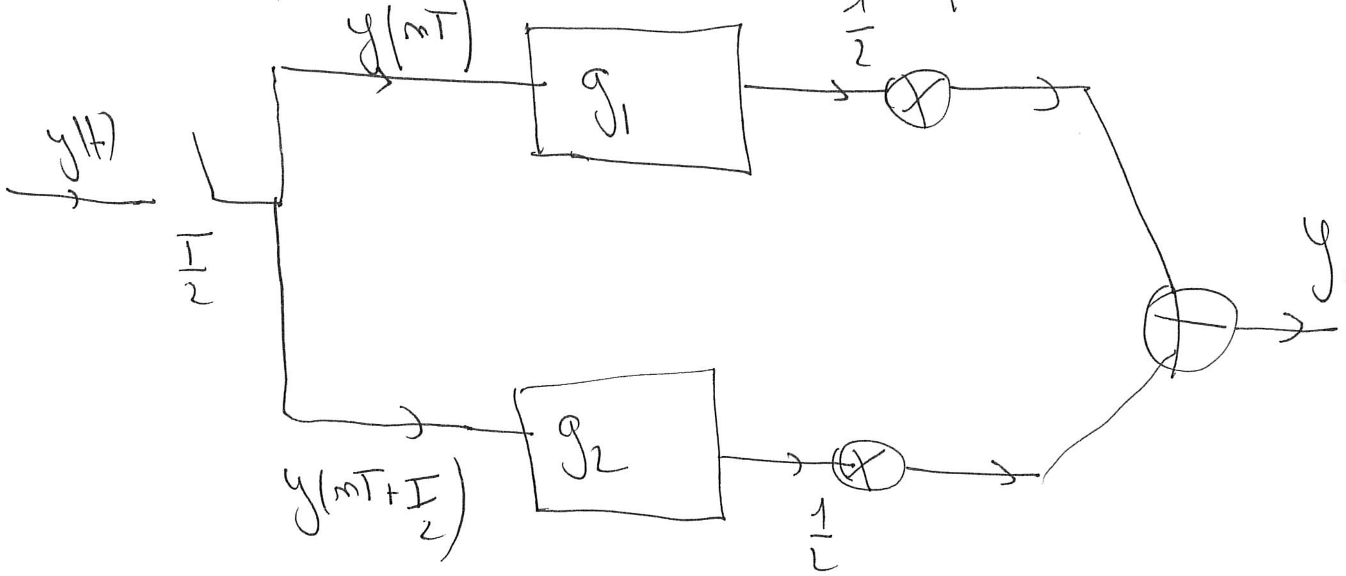
$$y_m = \frac{1}{2}\left(\sum_m y\left(\frac{mT}{2}\right) g\left(\frac{mT}{2} - mT\right)\right)$$

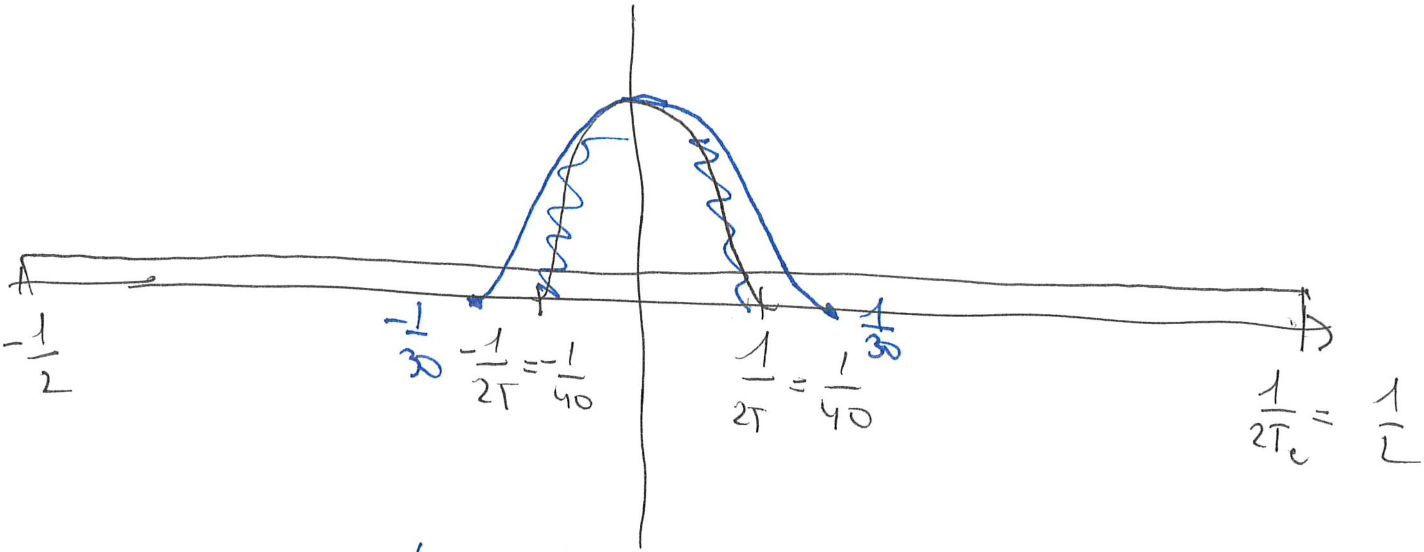
$$= \frac{1}{2}\left[\sum_k y(kT)\, g(kT - mT) + \sum_k y\left(kT + \frac{T}{2}\right) g\left(kT + \frac{T}{2} - mT\right)\right]$$

$$g_1(m) = g(mT) \qquad g_2(m) = g\left(mT+\frac{T}{2}\right)$$

$$y_m = \frac{1}{2}\left[\sum_k y(kT)\, g_1(m-k) + y\left(kT+\frac{T}{2}\right) g_2(k-m)\right]$$

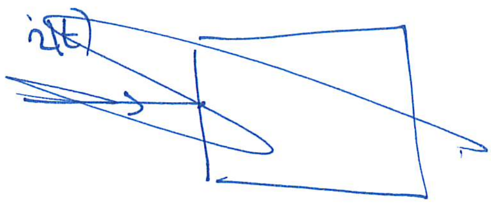
$$= \frac{1}{2}\left[\sum_\ell g_1(\ell)\, y((m-\ell)T) + \sum_\ell g_2(\ell)\, y\left((m-\ell)T+\frac{T}{2}\right)\right]$$



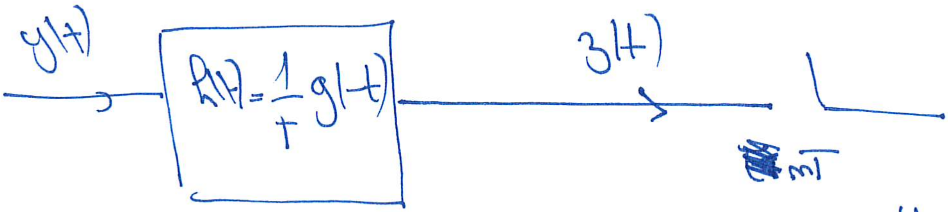


$$\frac{1}{30} = \left(\frac{1+\rho}{2T}\right) \qquad \rho = 0.5 \quad , \quad T = 20$$

<u>Diagramme de l'œil</u>



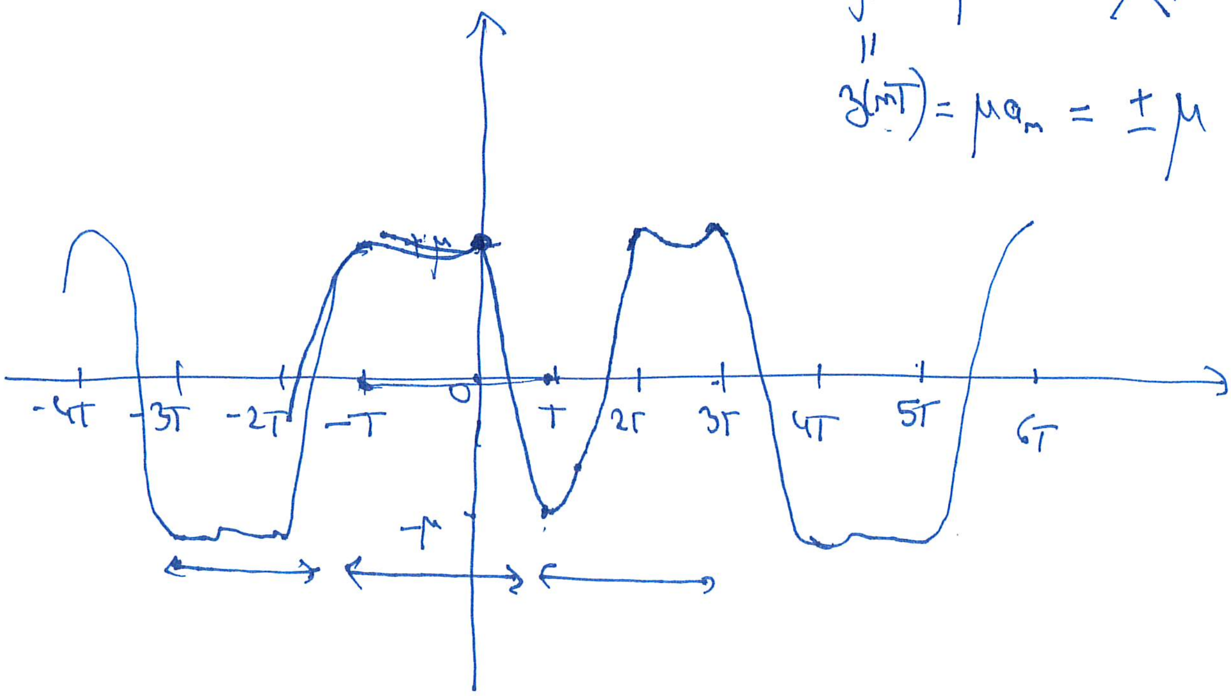
$\tau = 0$

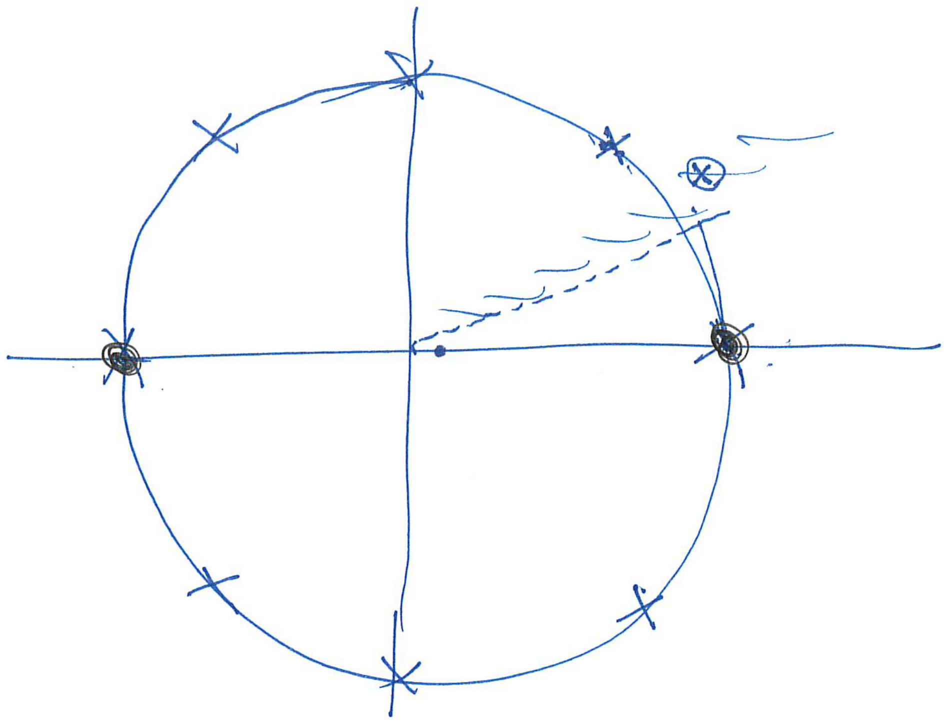


$$y_m = \mu a_m + \cancel{b_m}$$

$$\|$$

$$z(mT) = \mu a_m = \pm \mu$$





$E_b = E_s$

$E_b = \frac{E_s}{3}$, $E_s = 3E_b$