Petit rappel sur l'ordre diversité

Exemple

$y_{1,m} = \alpha_1 a_m + b_{1,m}$

$y_{2,m} = \alpha_2 a_m + b_{2,m}$

$\alpha_1, \alpha_2 \quad \mathcal{N}_c(0, \delta^2)$

$b_{1,m}, b_{2,m} \quad \mathcal{N}_c(0, \sigma^2)$

$z_m = \alpha_1^* y_{1,m} + \alpha_2^* y_{2,m}$

Probabilité d'évanouissement profond :

$\Gamma = \frac{\delta^2}{\sigma^2}$: rapport signal sur bruit moyen

$P_{ep} \sim \frac{1}{\Gamma^2}$ si Γ grand à 2 antennes, contre $\frac{1}{\Gamma}$ avec 1 antenne

~~Avec $\Gamma > 2$,~~

Avec n antennes de réception suffisamment éloignées :

$$P_{ep} \sim \frac{1}{\Gamma^{n}}$$

n : l'ordre de diversité.

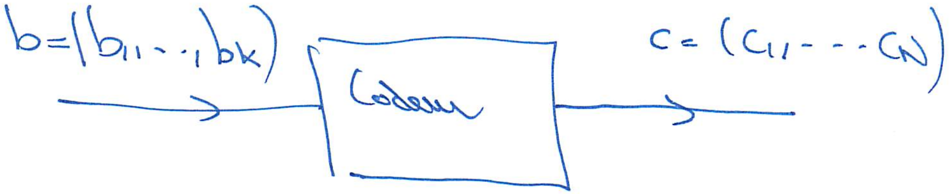
Point rapide sur le codage correcteur d'erreur.

Idée de base du codage correcteur d'erreur :

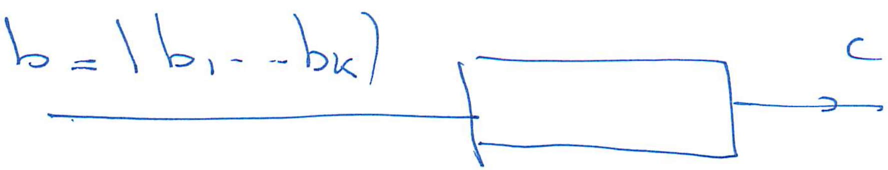
$b = (b_1, \dots, b_K)$ mot binaire de K bits à transmettre

$\downarrow$

$c = (c_1, \dots, c_N)$ mot binaire de N bits $\qquad N > K$



Exemple de codeur : codage par répétition $N = 2K$



$c = (b_1, \dots, b_K, b_1, \dots, b_K)$

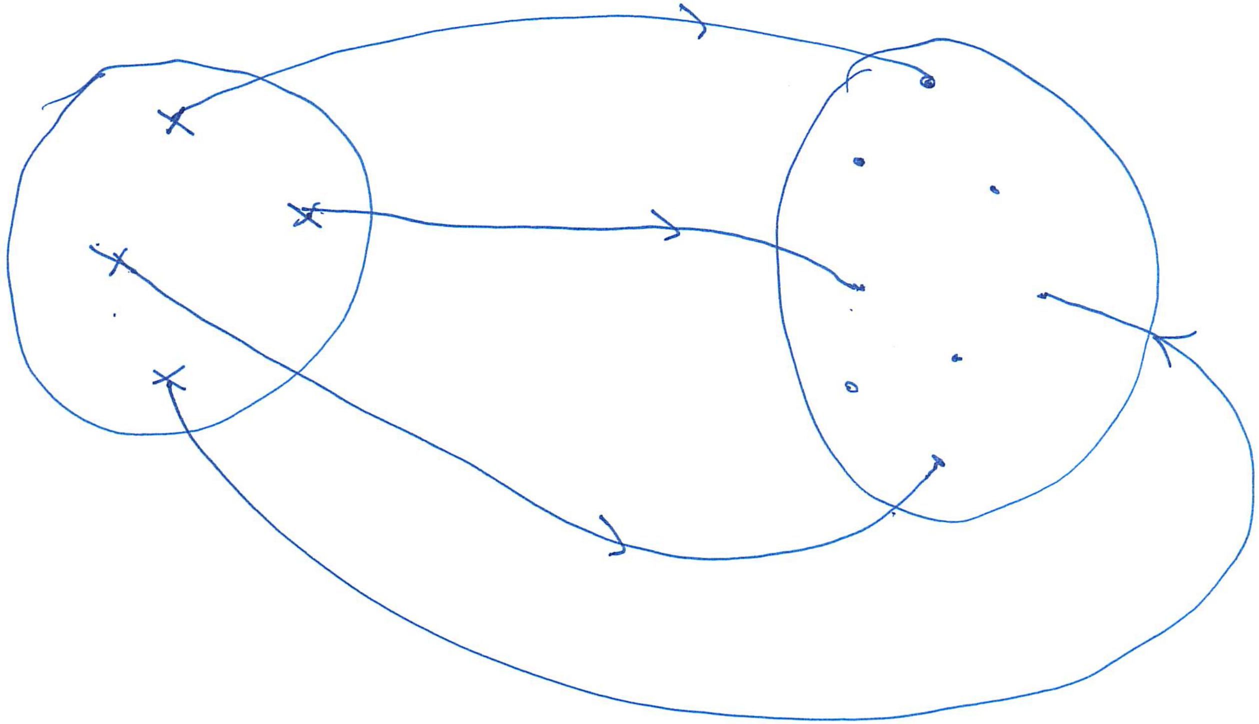
$\hat{c} = (\hat{b}_1, \dots, \hat{b}_K, \hat{b}_{K+1}, \dots, \hat{b}_{2K})$

Quelques définitions plus formelles

$N > K$

Code (N, K) : toute application de l'ensemble des mots binaires à K éléments vers l'ensemble des mots binaires à N éléments

$N=3$
$K=2$



$(b_1, b_2) \longrightarrow (c_1, c_2, c_3)$

~~Distance de H~~

Si $\mathcal{C}$ est un code (N, K), on dit $c = (c_1 \ldots c_N)$ est un mot de code si il est atteint par une flèche de l'application.

$\mathrm{Card}\, \mathcal{C} = 2^K$.

Distance de Hamming entre 2 mots binaires à N éléments :

$c = (c_1, \ldots c_N)$

$c' = (c'_1, \ldots, c'_N)$

$d(c, c')$ = nombre de bits dont c et c' diffèrent.

Exemple $N = 3$ $c = (0, 1, 1)$.

$c' = (1, 1, 1)$

$d(c, c') = 1$

Distance minimale d_{min} d'un code $\mathcal{C}$:

$$d_{min} = \min_{\substack{c, c' \in \mathcal{C} \\ c \neq c'}} d(c, c')$$

Exemple :

$K = 2$ $\quad N = 3$

$(0,0) \longrightarrow (0,0,0)$

$(1,1) \longrightarrow (1,1,1)$

$(1,0) \longrightarrow (0,1,0)$

$(0,1) \longrightarrow (1,0,1)$

$d_{min} = 1$

$N = 2K$

$c = (b_1, \dots, b_K, b_1, \dots, b_K)$

$d_{min} = 2$

$c' = (b'_1, \dots, b'_K, b'_1, \dots, b'_K)$

Idée intuitive : Plus d_{min} sera grand, plus les performances en terme de taux d'erreur vont être bonnes.

<u>Idée intuitive:</u>
- Plus N sera grand devant K, plus d_{min} sera grand
- Plus N et K sont grands, plus d_{min} sera grand.

Exemple $K = 1$

$$b \longrightarrow c = (b, \ldots b) \qquad d_{min} = N$$

2 mots de code: $\begin{cases} c = (0, \ldots, 0) \\ c = (1, \ldots, 1) \end{cases}$

Prendre N nettement plus grand que K est-il une bonne solution ?

On cherche à assurer un certain débit binaire utile D_b, $T_b = \dfrac{1}{D_b}$ correspond au temps qu'il faut en moyenne pour transmettre un bit

Si $D_b = 1$ Mbit/sec, $T_b = \dfrac{1}{D_b} = 10^{-6}$ sec

K bits $b=(b_1, \dots, b_K)$ sont transmis en KT_b secondes

N bits $c=(c_1, \dots, c_N)$ doivent être transmis en KT_b secondes

T_c durée de transmission de chaque bit de $c=(c_1, \dots, c_N)$

$$N T_c = K T_b \Rightarrow T_c = \frac{K}{N} T_b$$

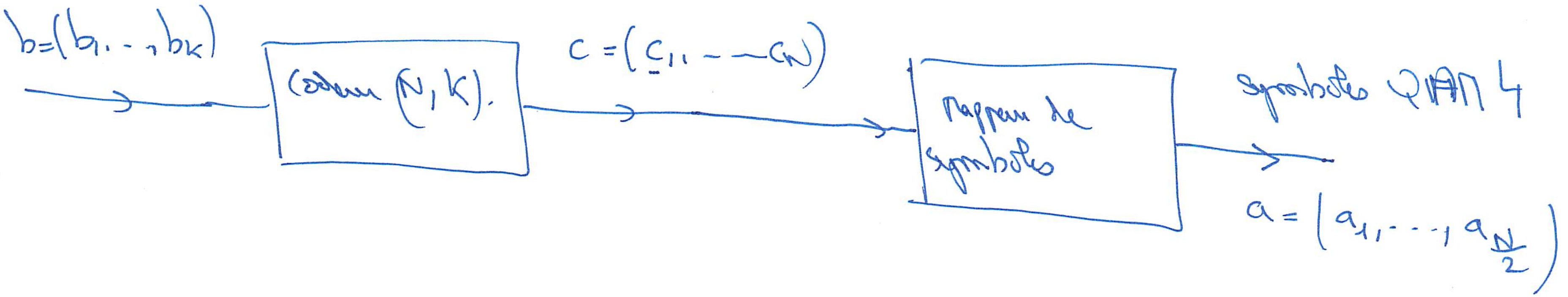
$$D_c = \frac{1}{T_c} = \frac{N}{K} D_b$$

Si par exemple $D_b = 1$ Mbit/sec et que $\frac{N}{K} = 3$, $D_c = 3$ Mbits/sec

et si on choisit des symboles qui valent ± 1, le débit symbole doit être égal à $D_c = \frac{N}{K} D_b$ $\Rightarrow$ la période symbole T vérifie

$$\frac{1}{T} = D_c = \frac{N}{K} D_b \qquad D_b = \frac{K}{N} D_c$$

8



$\frac{1}{T}$ le débit symbole étant fixé, que vaut le débit binaire utile D_b ?

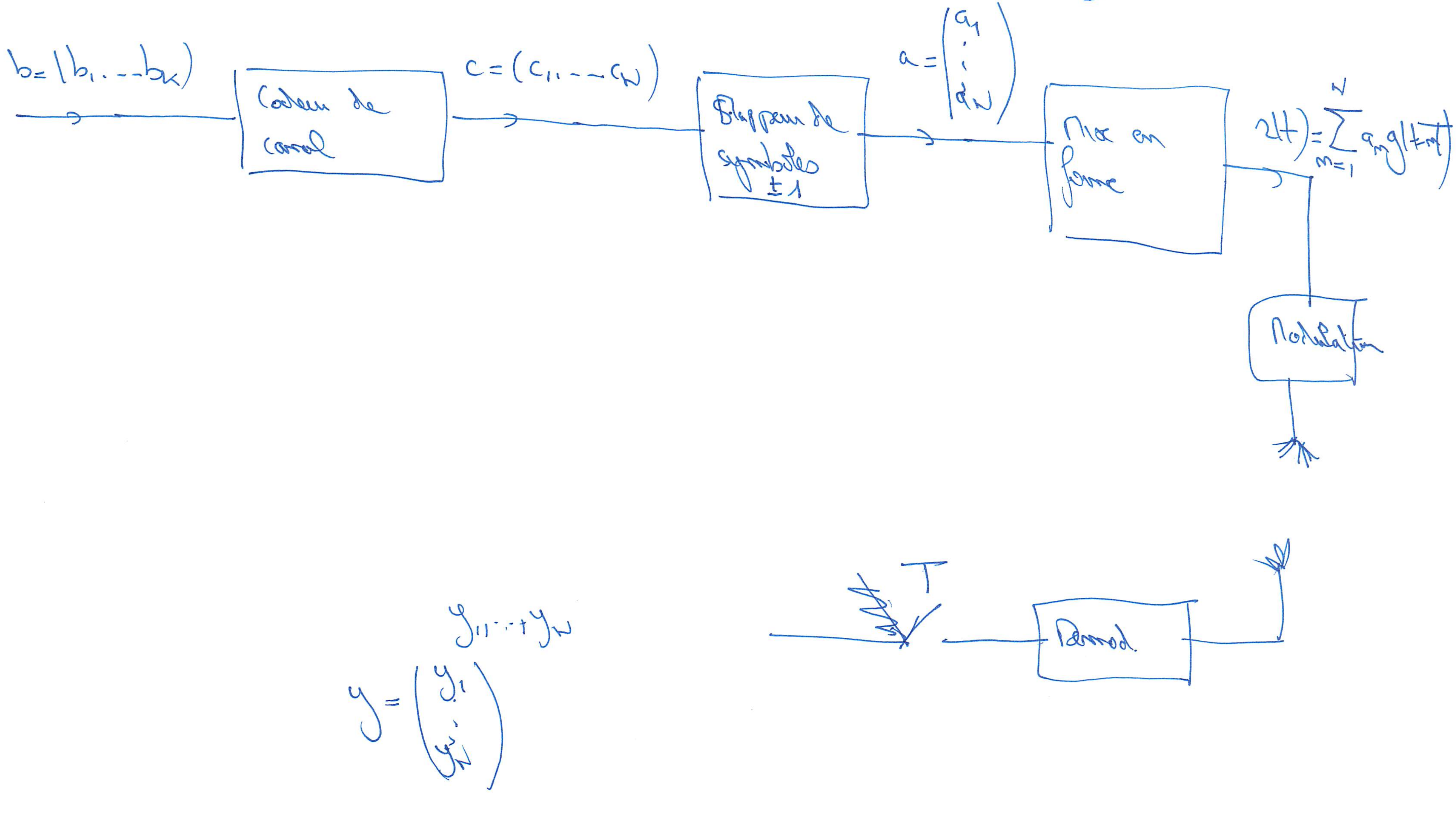
$$\frac{D_c}{2} = D_a \qquad D_c = 2D_a$$

$$D_c = \frac{N}{K} D_b$$

$$\Rightarrow \frac{N}{K} D_b = 2 D_a \Rightarrow D_b = 2 \cdot \frac{K}{N} D_a =$$

9

Evaluation de probabilité d'erreur dans le canal gaussien et le canal de Rayleigh en présence d'un code (N,K)



$\lambda_1, \lambda_1 \ldots \lambda_N$ variables aléatoires $N_c(0, \delta^2)$

$b_1 \ldots b_N$ variables aléatoires $N_c(0, \sigma)$

$$y_1 = \lambda_1 a_1 + b_1$$
$$y_2 = \lambda_2 a_2 + b_2$$
$$\vdots$$
$$y_N = \lambda_N a_N + b_N$$

$$y = \cancel{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}} =$$

$$z_1 = \mathrm{Re}\left(e^{-i \operatorname{Arg} \lambda_1} y_1\right) = \mathrm{Re}\left[\underbrace{e^{-i \operatorname{Arg} \lambda_1} \lambda_1}_{|\lambda_1|} a_1 + e^{-i \operatorname{Arg} \lambda_1} b_1\right]$$

$b_{1,1} : N(0, \sigma/2)$

$$z_1 = |\lambda_1| a_1 + b_{1,1}$$
$$z_2 = |\lambda_2| a_2 + b_{1,2}$$
$$\vdots$$
$$z_N = |\lambda_N| a_N + b_{1,N}$$

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_N \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} |\lambda_1| & & \\ & \ddots & \\ & & |\lambda_N| \end{pmatrix}}_{\Lambda} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}}_{a} + \underbrace{\begin{pmatrix} b_{1,1} \\ b_{1,2} \\ \vdots \\ b_{1,N} \end{pmatrix}}_{b_1}$$

$$z = \Lambda a + b_1$$

11

$z = \Lambda a + b,$

$c \in \mathcal{C} = \{ c(1), c(2), \ldots, c(M) \} \quad M = 2^K$

$c(1), c(2), \ldots, c(M)$ sont des mots binaires à N éléments.

$a \in \mathcal{A} = \{ a(1), \ldots, a(M) \}$

Comment estimer a : $\min_{a' \in \mathcal{A}} \| z - \Lambda a' \|^2$,

On estime a par $\hat{a} = \operatorname{Arg\,Min}_{a' \in \mathcal{A}} \| z - \Lambda a' \|^2$.

Cette stratégie minimise la probabilité d'erreur.

$$\| z - \Lambda a' \|^2 = \sum_{m=1}^{N} \left[z_m - |\lambda_m| a'_m \right]^2$$

Evaluation de $P(\hat{a} \neq a) = P_e$

Pour simplifier, on va supposer que $a = a(i)$

$\hat{a} \neq a(i) \Leftrightarrow$ il existe $j \neq i$ tel que $\|z - \Lambda a(j)\|^2 < \|z - \Lambda a(i)\|^2$

$$P_e = P\left[\bigcup_{j \neq i} \left(\|z - \Lambda a(j)\|^2 < \|z - \Lambda a(i)\|^2 \right) \right]$$

$$\leq \sum_{j \neq i} \underbrace{P\left(\|z - \Lambda a(j)\|^2 < \|z - \Lambda a(i)\|^2 \right)}_{P_{j \to i}}$$

Évaluation de $P_{j \to i} = P\left(\|z - \Lambda a(j)\|^2 < \|z - \Lambda a(i)\|^2 \right)$ (13)

Premier cas : le canal gaussien : $\Lambda = \mu I$ où μ^2 est la puissance reçue.

$$z_m = \mu a_m + b_{1,m}$$

$$P_{j \to i} = P\left(\|z - \mu a(j)\|^2 < \|z - \mu a(i)\|^2 \right)$$

$a(i)$ étant le mot transmis, $z = \mu a(i) + b_1$

$$\|z - \mu a(j)\|^2 < \|z - \mu a(i)\|^2 \cancel{\Leftrightarrow \|z - (\mu a}$$

$$\Leftrightarrow \|\mu a(i) - \mu a(j) + b_1\|^2 < \|b_1\|^2$$

$$\underbrace{\|\mu(a(i) - a(j)) + b_1\|^2} < \|b_1\|^2$$

$$\|\mu(a(i) - a(j))\|^2 + \|b_1\|^2 + 2\mu(a(i) - a(j))^T b_1 < \|b_1\|^2$$

$$2\mu(a(j) - a(i))^T b_1 > \mu^2 \|a(j) - a(i)\|^2$$

$$P_{j,i} = P\left[(a(j) - a(i))^T b_1 > \frac{\mu}{2} \| a(j) - a(i) \|^2 \right]$$

$$(a(j) - a(i))^T b_1 \qquad b = \begin{pmatrix} b_{1,1} \\ \vdots \\ b_{1,N} \end{pmatrix} \qquad b_{1,1}, \dots, b_{1,N} \quad \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{2}\right) \text{ indépendantes}$$

$$\sum_{m=1}^{N} (a_m(j) - a_m(i)) \cdot b_{1,m} : \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{2} \| a(j) - a(i) \|^2 \right)$$

$$P_{j,i} = P\left[\mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{2} \| a(j) - a(i) \|^2 \right) > \frac{\mu}{2} \| a(j) - a(i) \|^2 \right]$$

$$= P\left[(a(j) - a(i))^T b_1 > \frac{\mu}{2} \| a(j) - a(i) \|^2 \right]$$

$$= P\left[\frac{(a(j) - a(i))^T b_1}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2} \| a(j) - a(i) \|^2}} > \boxed{\frac{\sqrt{\left(\frac{\mu}{2}\right)^2 \| a(j) - a(i) \|^4}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2} \| a(j) - a(i) \|^2}}} \right]$$

$$= P\left(\mathcal{N}(0, 1) > \boxed{\sqrt{\frac{\mu^2}{2\sigma^2} \| a(j) - a(i) \|^2}} \right) = Q\left(\sqrt{\frac{\mu^2}{2\sigma^2} \| a(j) - a(i) \|^2} \right)$$

c(j)

$$a_m(j) = 2\,c_m(j) - 1$$

$$a(j) = 2\,\big(c(j)\big)^T - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$a(j) - a(i) = 2\,\big(c(j) - c(i)\big)^T$$

$$\|a(j) - a(i)\|^4 = 4\,\|c(j) - c(i)\|^2 = 4 \underbrace{\sum_{m=1}^{N} \big(c_m(j) - c_m(i)\big)^2}$$

$$= 4\, d\big(c(j), c(i)\big)$$

$$P_{j\to i} = Q\left(\sqrt{\frac{2\mu^2}{\sigma^2}\, d(c(j), c(i))}\right)$$

$$d(c(j), c(i)) \geq d_{min}$$

$$\leq Q\left(\sqrt{\frac{2\mu^2}{\sigma^2}\, d_{min}}\right)$$

$$Q(\sqrt{x}) \leq \frac{1}{2}\, e^{-x/2}$$

$$\leq \frac{1}{2}\, e^{-\frac{\mu^2}{\sigma^2} d_{min}}$$

$$P_e \leq \sum_{j\neq i} P_{j\to i} \leq \sum_{j\neq i} \frac{1}{2}\, e^{-\frac{\mu^2}{\sigma^2} d_{min}}$$

$$P_e \leq \frac{1}{2}\, 2^K \cdot e^{-\frac{\mu^2}{\sigma^2} d_{min}}$$

K bits $\longrightarrow$ N symboles

$$K E_b = N E_s \qquad E_s = \mu^2 T \qquad E_s = \frac{K}{N} E_b$$

$$\sigma^2 = \frac{N_0}{T} \qquad \frac{\mu^2}{\sigma^2} = \frac{\mu^2 T}{\sigma^2 T} = \frac{E_s}{N_0} = \frac{K}{N} \frac{E_b}{N_0}$$

$$P_e \leq \frac{1}{2} \underbrace{2^K}_{\exp K \operatorname{Log} 2} e^{-\frac{K}{N} d_{min} \frac{E_b}{N_0}} = \frac{1}{2} \exp -K\left[\frac{d_{min}}{N}\frac{E_b}{N_0} - \operatorname{Log} 2\right]$$

Sans contrainte de bande passante, ~~la probabilité~~ On peut trouver 1 code correcteur d'erreur pour lequel P_e peut être rendu arbitrairement petit, pour peu que $\frac{E_b}{N_0} > 2 \operatorname{Log} 2 = 1{,}4$ dB.

(17)

Utilisation d'un code orthogonal : $\{c(1), \dots, c(M)\}$ est choisi pour les vecteurs $(a(1), \dots a(M))$ soient orthogonaux entre eux.

$$\|a(i) - a(j)\|^2 = \|a(i)\|^2 + \|a(j)\|^2 = 2N$$

$$\| \qquad 4\|c(i) - c(j)\|^2 = 4\, d(c(i), c(j)) = 2N \Rightarrow \forall i,j \quad d(c(i), c(j)) = \frac{N}{2}$$

$$d_{min} = \frac{N}{2}$$

$$P_e \leq \frac{1}{2} \exp -K\left[\frac{1}{2}\frac{E_b}{N_0} - \operatorname{Log} 2\right]$$

Si $\frac{E_b}{N_0} > 2 \operatorname{Log} 2$, $\frac{1}{2}\frac{E_b}{N_0} - \operatorname{Log} 2 > 0$)

Si $K \to +\infty$, $P_e \to 0$

$M = 2^K \leq N$ Au mieux, $N = 2^K$ $\quad \frac{K}{N} = \frac{K}{2^K}$

Si ~~$K \to +\infty$~~, $\frac{K}{N} \to 0$, $\frac{N}{K} \to +\infty$, la bande passante nécessaire tend vers $+\infty$.

Théorème de capacité de Shannon

Supposons que l'on dispose pour transmettre d'une bande passante de W Hz. Alors, si débit binaire utile D_b ~~est~~ inférieur à une certaine valeur $C(W)$, on peut trouver des codes correcteurs d'erreur qui font tendre la probabilité d'erreur vers 0.

$C(W)$ est la solution quand elle existe de l'équation :

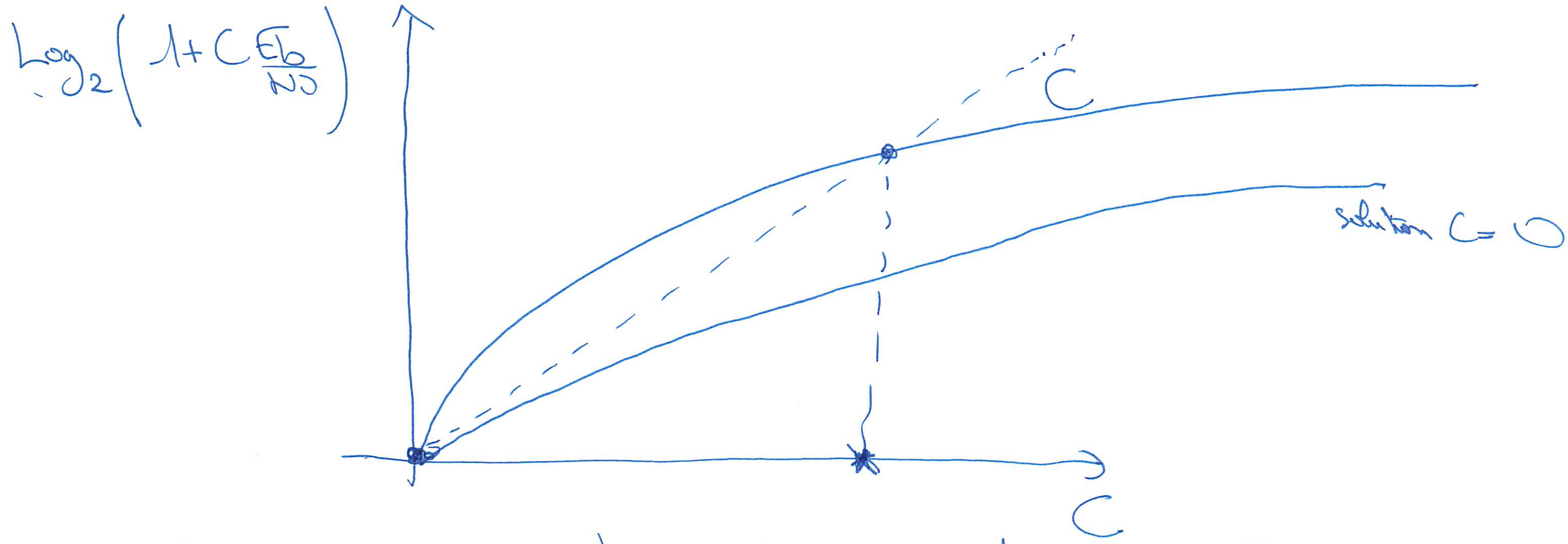
$$\frac{C(W)}{W} = \log_2\left(1 + \frac{C(W)}{W}\frac{E_b}{N_0}\right)$$

Si C vérifie $C = \log_2\left(1 + C\frac{E_b}{N_0}\right)$, $C(W) = W\,C$.

C est appelé la capacité de Shannon du canal gaussien, et s'exprime en bit/sec/Hz.

19

Equation $C = \mathrm{Log}_2\left(1 + C\frac{E_b}{N_0}\right) = \dfrac{\mathrm{Log}\left(1 + C\frac{E_b}{N_0}\right)}{\mathrm{Log}\,2}$



$$\frac{d}{dC}\left(\mathrm{Log}_2\left(1 + \frac{CE_b}{N_0}\right)\right) = \frac{1}{\mathrm{Log}\,2} \cdot \frac{1}{1 + C\frac{E_b}{N_0}} \times \frac{E_b}{N_0}$$

$$\left(\frac{d}{dC}\mathrm{Log}_2\left(1 + C\frac{E_b}{N_0}\right)\right)_{C=0} = \frac{1}{\mathrm{Log}\,2}\,\frac{E_b}{N_0}$$

$C = \mathrm{Log}_2\left(1 + C\frac{E_b}{N_0}\right)$ a une solution strictement positive ssi $\frac{E_b}{N_0} > \mathrm{Log}\,2 = -1{,}6\ \mathrm{dB}$