Signal démodulé

$$y(t) = \mu e^{-2i\pi f_0 \tau(t)} x(t-\tau(t)) + b(t)$$

$$\tau(t) = \tau + \frac{v\cos\theta}{c} t$$

$$e^{-2i\pi f_0 \tau(t)} = e^{-2i\pi f_0 \tau} e^{-2i\pi \underbrace{f_0 \frac{v}{c}\cos\theta}_{\Delta f} t}$$

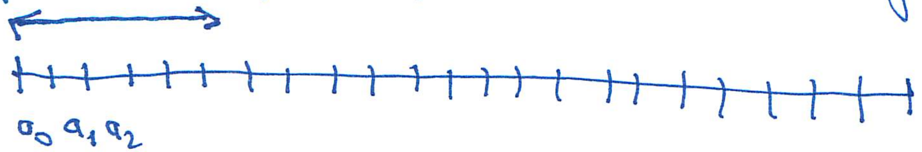
$$= e^{-2i\pi f_0 \tau} e^{-2i\pi \Delta f t}$$

$$y(t) = \mu e^{-2i\pi f_0 \tau} e^{-2i\pi \Delta f t} x\left(t-\tau-\frac{vt\cos\theta}{c}\right) + b(t)$$

Sur la durée d'un paquet, $x\left(t-\tau-\frac{vt\cos\theta}{c}\right) \simeq x(t-\tau)$

$$y(t) = \mu e^{-2i\pi f_0 \tau} e^{-2i\pi \Delta f t} x(t-\tau) + b(t)$$

symboles d'apprentissage : nombre de symboles d'apprentissage N_a ②



N_p = nombre de symboles du paquet

On transmet $N_p - N_a$ symboles (pendant $N_p T$ secondes ⇒ débit symbole : $\underbrace{\frac{N_p - N_a}{N_p T}}_{\left(1 - \frac{N_a}{N_p}\right)\frac{1}{T}} < \frac{1}{T}$)

N_p est limité par la nécessité de faire en sorte que

$$e^{-2i\pi \Delta f T n} \simeq 1 \quad \text{pour tout } n = 0, \dots, N_p - 1$$

$$\Longleftrightarrow \quad e^{-2i\pi \underline{\Delta f T N_p}} \simeq 1$$

N_p doit être inférieur à un certain seuil

Ex GSM

$N_a \simeq 20$

$N_p \simeq 160$

$\frac{N_a}{N_p} = \frac{1}{8}$

Dans certains modes 3G, $\frac{N_a}{N_p} \simeq \frac{1}{2}$

$$y_n \simeq \mu e^{-2i\pi f_0 \tau} e^{-2i\pi \Delta f \tau} a_n + b_n$$

$$y_n \simeq \underbrace{\mu e^{i\theta}}_{\lambda} a_n + b_n \qquad \theta = -2\pi (f_0 \tau + \Delta f \tau) = e^{-2i\pi\tau(f_0 + \Delta f)}$$

On observe les $(y_n)_{n=0,\dots,N_a-1}$. Les $(a_n)_{n=0,\dots,N_a-1}$ sont connus

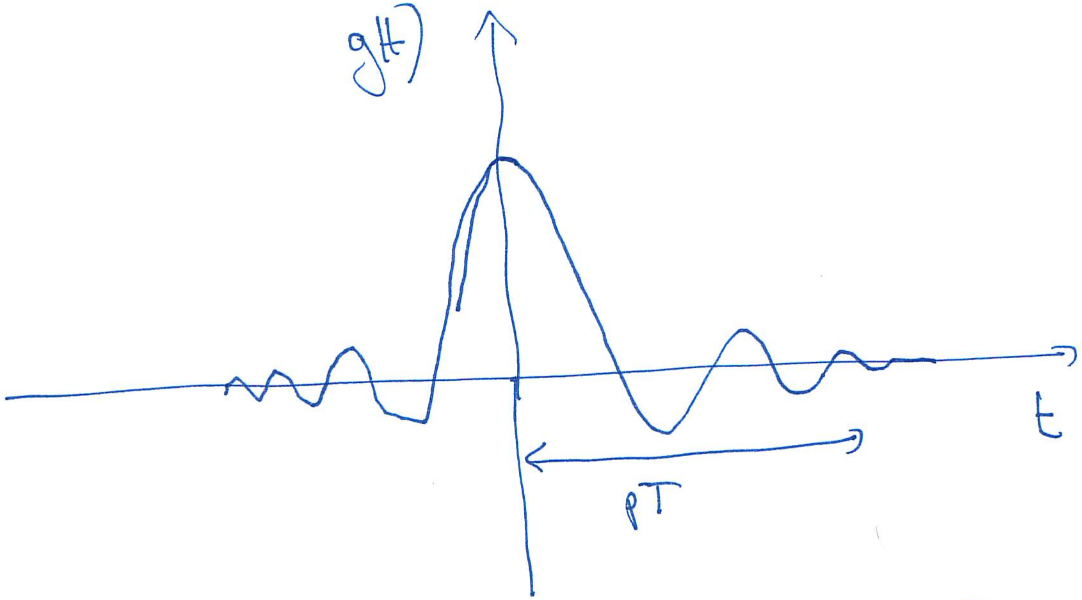
$$y_m = \lambda a_m + b_m , \quad m = 0, \dots, N_a - 1$$

<u>Estimateur de λ</u> :

$$\min_{\delta} \sum_{m=0}^{N_a-1} | y_m - \delta a_m |^2$$

$$\hat{\lambda} = \operatorname{Arg\,Min} \left(\sum_{m=0}^{N_a-1} | y_m - \delta a_m |^2 \right)$$

$$\hat{\theta} = \operatorname{Arg} \hat{\lambda}$$



$g(t) \simeq 0$ si $|t| > \overline{p.T}$

$2\pi \Delta f \, p \, T \ll 1$? dans les cas usuels.

Exemple: $p = 3$ $\Delta f = 100\ Hz$ $(v = 30\ m/sec,\ f_0 = 1\ GHz)$

$T = 3\ 10^{-6}$ sec.

$$\underbrace{2\pi \cdot 100 \cdot 3 \cdot 3\ 10^{-6}}_{\simeq 2\pi\ 10^{3}\ 10^{-6}} \ll 1$$

$\simeq 2\pi\ 10^{3}\ 10^{-6} \simeq 2\pi\ 10^{-3}$ ~~$\Leftrightarrow$~~ $\simeq 10^{-2}$

6

$$r(s) = \frac{1}{T}\int g(s+t)\, g(t)\, dt$$

$$y(t) = \mu_1 e^{-2i\pi f_0 \tau_1} x(t-\tau_1) + \mu_2 e^{-2i\pi f_0 \tau_2} x(t-\tau_2) + b(t)$$

$$\tau \in [\tau_1, \tau_2] \qquad y_m = \frac{1}{T}\int y(t)\, g(t-\tau-mT)\, dt$$

$$y_{m,1} = \frac{1}{T}\int \mu_1 e^{-2i\pi f_0 \tau_1} \underbrace{x(t-\tau_1)}_{\sum_m a_m g(t-\tau_1-mT)} g(t-\tau-mT)\, dt = \mu_1 e^{-2i\pi f_0 \tau_1} \sum_m a_m \underbrace{\frac{1}{T}\int g(t-\tau_1-mT)\, g(t-\tau-mT)\, dt}$$

$$\frac{1}{T}\int g(t-\tau_1-mT)\, g(\underbrace{t-\tau-mT}_{u = t-\tau-mT})\, dt \qquad \Rightarrow t = u+\tau+mT$$

$$= \frac{1}{T}\int g(u+\tau-\tau_1+(n-m)T)\, g(u)\, du$$

$$= \underbrace{\frac{1}{T}\int g(u+\tau-\tau_1+(n-m)T)\, g(u)\, du}_{r(\tau-\tau_1+(n-m)T)}$$

$$y_{n,1} = \mu_1 e^{-2i\pi f_0 \tau_1} \sum_m a_m \, r(\tau - \tau_1 + (n-m)T)$$

Si $\tau = \tau_1$ $\quad y_{n,1} = \mu_1 e^{-2i\pi f_0 \tau_1} \sum_m a_m \underbrace{r((n-m)T)}_{\substack{=0 \text{ si } m \neq n \\ =1 \text{ si } m=n}} = \mu_1 e^{-2i\pi f_0 \tau_1} a_n$

$$y_{n,2} = \mu_2 e^{-2i\pi f_0 \tau_2} \sum_m a_m \, r(\tau - \tau_2 + (n-m)T)$$

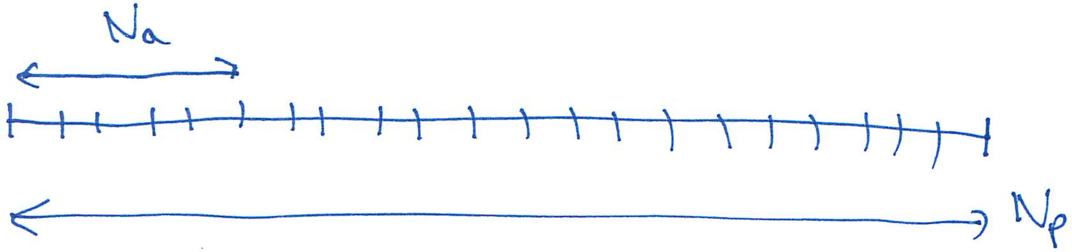
$$y_{n,1} + y_{n,2} = \sum_m a_m \Big(\underbrace{\mu_1 e^{-2i\pi f_0 \tau_1} r(\tau - \tau_1 + (n-m)T) + \mu_2 e^{-2i\pi f_0 \tau_2} r(\tau - \tau_2 + (n-m)T)}_{h_{n-m}} \Big)$$

$$h_p = \mu_1 e^{-2i\pi f_0 \tau_1} r(\tau - \tau_1 + pT) + \mu_2 e^{-2i\pi f_0 \tau_2} r(\tau - \tau_2 + pT)$$

$y_{n,1} + y_{2,n} = \sum_m a_m h_{n-m} = \sum_p h_p a_{n-p} =$ combinaison des symboles a situés autour de l'instant n

On suppose que $y_m = \sum_{\ell=0}^{L-1} h_\ell a_{m-\ell} + b_m$

Comment estimer les symboles du paquet à partir des y_m ?



<u>Etape 1</u> Estimer $(h_\ell)_{\ell=0,\dots,L-1}$ à partir $(y_m)_{m=0,\dots,N_a-1}$

$0 \leq m \leq N_a - 1$ $\quad y_m = \sum_{\ell=0}^{L-1} h_\ell a_{m-\ell} + b_m$ avec les $(a_{m-\ell})$ connus

$$\min_{g_0,\dots,g_{L-1}} \sum_{m=0}^{N_a-1} \left| y_m - \sum_{\ell=0}^{L-1} g_\ell a_{m-\ell} \right|^2$$

On estime $h_0, \dots, h_{L-1}$ par

$$\hat{h}_0, \dots, \hat{h}_{L-1} = \operatorname{Arg\,Min}_{g_0 \dots g_{L-1}} \sum_{m=0}^{N_a-1} \left| y_m - \sum_{\ell=0}^{L-1} g_\ell a_{m-\ell} \right|^2$$

Nécessite que N_a soit suffisamment grand.

Deuxième étape

On suppose $h_0, \dots, h_{L-1}$ connus. Il faut maintenant estimer les symboles $(a_m)_{m=N_a,\dots,N_p}$ à partir de $(y_m)_{m=N_a,\dots,N_p}$.

$$\min_{a_{N_a}, a_{N_a+1}, \dots, a_{N_p}} \sum_{m=N_a}^{N_p} \left| y_m - \sum_{l=0}^{L-1} h_l \, a_{m-l} \right|^2$$

avec la contrainte que $(a_m)_{m=N_a,\dots,N_p}$ appartiennent à l'ensemble des symboles possibles.

Ex: $a_m = \pm 1$. Si $N_a = 20$, $N_p = 150$, la recherche exhaustive nécessite 2^{130} opérations.

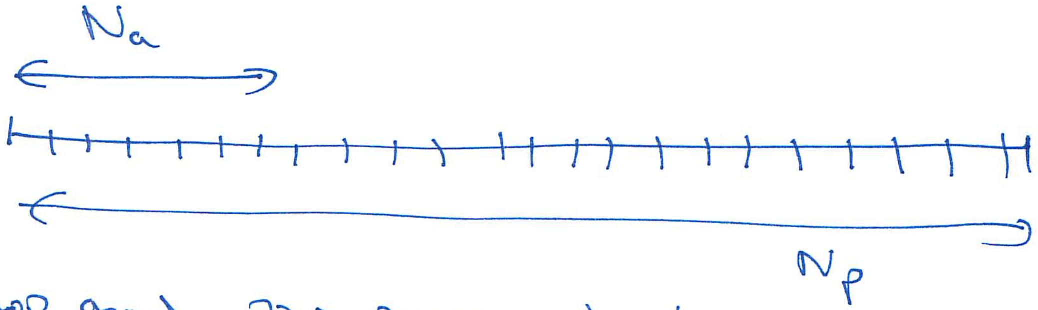
$a_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1 \pm i)$ $\quad 4^{130}$ opérations.

Algorithme de Viterbi : coûte $(N_p - N_a) \cdot 2^{L+1}$ opérations si $a_n = \pm 1$

$(N_p - N_a) \cdot 4^{L+1}$ opérations si $a_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1 \pm i)$

Complexité : 2^{L+1} ou 4^{L+1} par symbole

Conclusions fondamentales



- N_p pas trop grand pour pouvoir gérer les paramètres à estimer. (pour qu'ils soient constants sur le paquet)
- N_a pas trop petit pour bien estimer les paramètres, mais pas trop grand pour ne pas perdre en débit (le débit ~~est~~ réduit de $\frac{N_a}{N_p}\frac{1}{T}$)
- Le débit symbole ne doit pas être trop important pour que l'algorithme de Viterbi soit implémentable