1

$a_m = \pm 1$ $\quad E_b = E_s \quad E_s = \mu^2 T$

$$\mu = \sqrt{\frac{E_s}{T}} = \sqrt{\frac{E_b}{T}}$$

$$y_m = \mu e^{-2i\pi f_0 \tau} a_m + b_m$$

$$e^{2i\pi f_0 \tau} y_m = \mu a_m + b_m$$

Abus de notation
$b_m \to b_m e^{2i\pi f_0 \tau}$

$$\mathrm{Re}\left(e^{2i\pi f_0 \tau} y_m\right) = \mu a_m + b_{1,m} \qquad b_{1,m} = \mathrm{Re}(b_m)$$

$$b_{1,m} : \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

$$\sigma^2 = \frac{N_0}{T}$$

$\hat{a}_m = +1$ si $\mathrm{Re}\left(e^{2i\pi f_0 \tau} y_m\right) > 0$

$\hat{a}_m = -1$ si $\mathrm{Re}\left(e^{2i\pi f_0 \tau} y_m\right) < 0$

$$P_e = P(\hat{a}_m \neq a_m) = \underbrace{P(\hat{a}_m = 1, a_m = -1)} + P(\hat{a}_m = -1, a_m = 1)$$

$$(\hat{a}_m = 1, a_m = -1) = (-\mu + b_{1,m} > 0, a_m = -1)$$

$$= (b_{1,m} > \mu, a_m = -1)$$

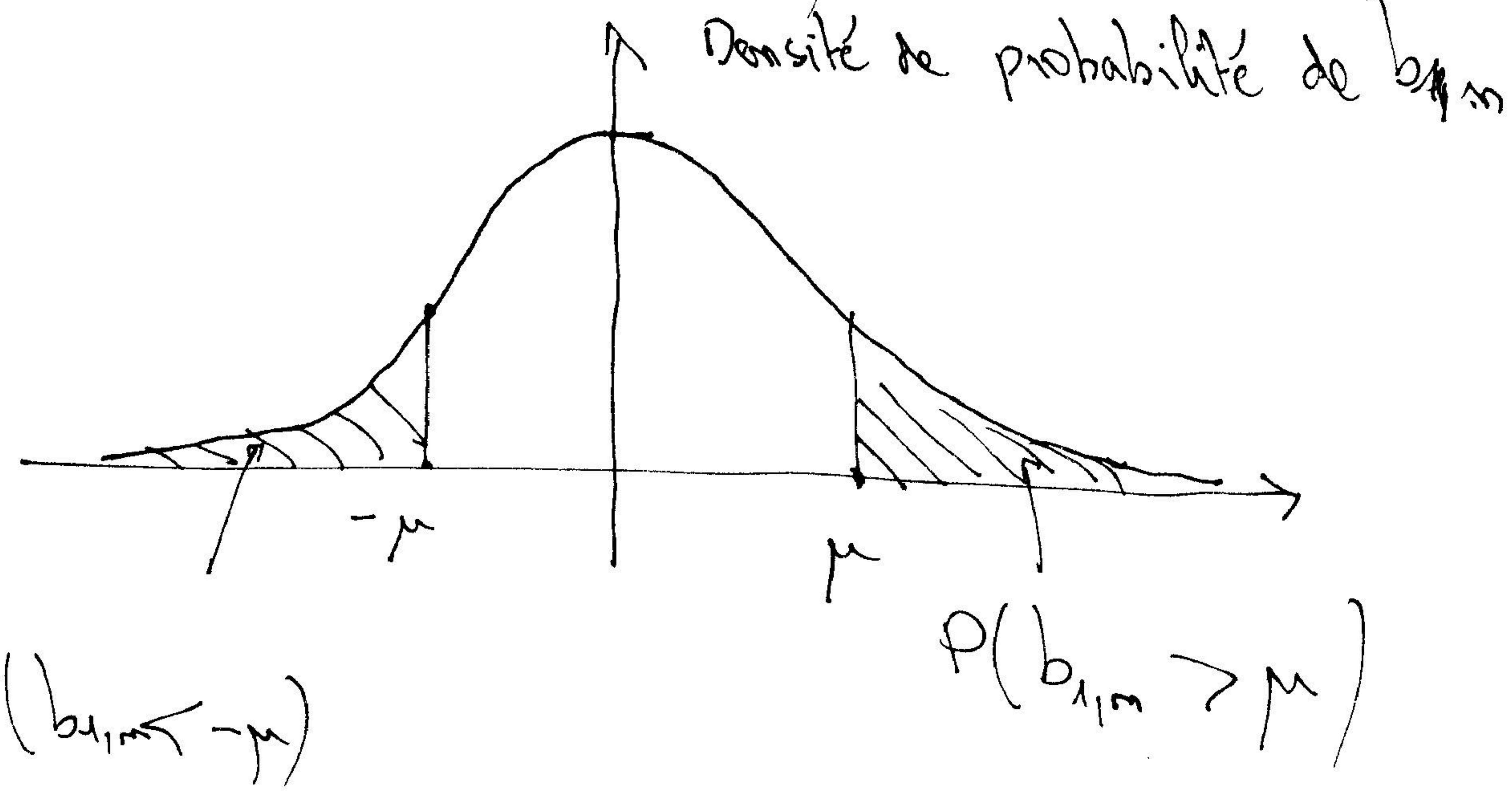
$$P(\hat{a}_m = 1, a_m = -1) = P(b_{1,m} > \mu) P(a_m = -1)$$

$$P(\hat{a}_m = -1, a_m = 1) = P(\mu + b_{1,m} < 0, a_m = 1)$$

$$= P(b_{1,m} < -\mu, a_m = 1) = P(b_{1,m} < -\mu)\, P(a_m = 1)$$

$$P_e = P(b_{1,m} > \mu)\, P(a_m = -1) + P(b_{1,m} < -\mu)\, P(a_m = 1)$$

$$b_{1,m} : \mathcal{N}\left(0, \frac{N_0}{2T}\right)$$



$$P(b_{1,m} > \mu) = P(b_{1,m} < -\mu)$$

$$P_e = P(b_{1,m} > \mu)\, P(a_m = -1) + P(b_{1,m} > \mu)\, P(a_m = 1)$$

$$= P(b_{1,m} > \mu)\Big(\underbrace{P(a_m = -1) + P(a_m = 1)}_{1}\Big) = P_e = P(b_{1,m} > \mu)$$

(3)

$$P(b_{1,m} > \mu) = P\left(\frac{b_{1,m}}{\sqrt{E(b_{1,m}^2)}} > \frac{\mu}{\sqrt{E(b_{1,m}^2)}} \right)$$

$$E(b_{1,m}^2) = \frac{N_0}{2T}$$

$$P_e = P\left(\frac{b_{1,m}}{\sqrt{E(b_{1,m}^2)}} > \frac{\mu}{\sqrt{\frac{N_0}{2T}}} \right) \qquad \mu = \sqrt{\frac{E_b}{T}}$$

$$P_e = P\left(\frac{b_{1,m}}{\sqrt{E(b_{1,m}^2)}} > \frac{\sqrt{\frac{E_b}{T}}}{\sqrt{\frac{N_0}{2T}}} \right) = P\left(\frac{b_{1,m}}{\sqrt{E(b_{1,m}^2)}} > \sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \right)$$

Loi de probabilité de $\frac{b_{1,m}}{\sqrt{E(b_{1,m}^2)}}$: $N(0,1)$

$$P_e = P\left(N(0,1) > \sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \right) = \int_{\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \, dt$$

$$Q(\sqrt{x}) = \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \, dt \quad \text{vérifie :}$$

$$Q(\sqrt{x}) \leq \frac{1}{2} e^{-x/2}$$

$$Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) \leq \frac{1}{2} e^{-E_b/N_0} \qquad \frac{1}{2} e^{-\frac{E_b}{N_0}}$$

Probabilité d'erreur en QAM 4

$$a_m = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_{1,m} + i\, a_{2,m}\right) \quad \text{où } a_{1,m}, a_{2,m} \in \{\pm 1\}$$

$a_{1,m}$ représente le premier bit transmis par a_m

$a_{2,m}$ " " le deuxième bit transmis par a_m

Calculer $P(\hat{a}_{1,m} \neq a_{1,m}) = P(\hat{a}_{2,m} \neq a_{2,m})$

= Probabilité d'erreur par bit transmis $\S$

$P(\hat{a}_{1,m} \neq a_{1,m})$?

$E_s = 2E_b$

$$y_m = \mu\, e^{-2i\pi f_0 \tau} a_m + b_m$$

$$y_m e^{2i\pi f_0 \tau} = \mu a_m + b_m$$

$$\mathrm{Re}\left(y_m e^{2i\pi f_0 \tau}\right) = \frac{\mu}{\sqrt{2}} a_{1,m} + b_{1,m}$$

$$\mathrm{Im}\left(y_m e^{2i\pi f_0 \tau}\right) = \frac{\mu}{\sqrt{2}} a_{2,m} + b_{2,m}$$

$\hat{a}_{1,m} = +1$ ssi $\mathrm{Re}\left(y_m e^{2i\pi f_0 \tau}\right) > 0$, $\hat{a}_{1,m} = -1$ ssi $\mathrm{Re}\left(y_m e^{2i\pi f_0 \tau}\right) < 0$

$P(\hat{a}_{1,m} \neq a_{1,m})$ peut être obtenue à partir du calcul pour le BPSK en changeant μ en $\frac{\mu}{\sqrt{2}}$

$$\mu^2 = \frac{E_s}{T}, \quad \frac{\mu}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{E_s}{2T}}$$

$$T\mu^2 = E_s = 2E_b \qquad \mu^2 = \frac{2E_b}{T} \quad \frac{\mu}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{E_b}{T}}$$

En BPSK : $P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$

En QAM4 : $P(\hat{a}_{1,m} \neq a_{1,m}) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$

$$\parallel$$

$$P(\hat{a}_{2,m} \neq a_{2,m})$$

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

QAM4 et BPSK ont la même probabilité d'erreur exprimée en fonction de $\frac{E_b}{N_0}$.

$\Rightarrow$ le QAM4 est préférable, car il permet de transporter 2 fois plus de bits.

$y_n(t) = \sqrt{2}\ \mu\ x_n(t-\tau(t)) + b_n(t), \quad \tau(t) = \tau + \frac{v\cos\theta}{c} t$

$$y(t) = \mu\, e^{-2i\pi f_0 \tau(t)}\, x(t-\tau(t)) + b(t)$$

$$= \mu\, e^{-2i\pi f_0 \tau}\, e^{-2i\pi \underbrace{f_0 \frac{v\cos\theta}{c}} t}\, x(t-\tau(t)) + b(t)$$

$\Delta f = f_0 \frac{v\cos\theta}{c}$ fréquence Doppler

$$y(t) = \mu\, e^{-2i\pi f_0 \tau}\, e^{-2i\pi \Delta f t}\, \underbrace{x(t-\tau(t))} + b(t)$$

On approximer $x(t-\tau(t))$ par $x(t-\tau)$

Si $0 \leq t \leq$ Durée d'un paquet $= D_p$

si $\delta \ll T$, $x(t-\tau-\delta) \simeq x(t-\tau)$

Sur une durée très inférieure à T, le signal x reste à peu près constant.

Si $\forall\, 0 \leq t \leq D_p$

~~Si $t \in [0, D_p]$.~~

~~Si $D_p \ll T$~~

$$x(t-\tau(t)) = x\left(t-\tau-\frac{v}{c}\cos\theta\, t\right)$$

Si $\frac{v\cos\theta}{c} D_p \ll T$, $\forall\, 0 \leq t \leq D_p$

$$\frac{v}{c}\cos\theta\, t \ll T \Rightarrow x\left(t-\tau-\frac{v}{c}\cos\theta t\right) \simeq x(t-\tau)$$

Est-ce que cette condition est respectée en pratique ?

Exemple numérique $v = 30\,m/sec$. $\theta = 0$

$\frac{v}{c} = 10^{-7}$, $10^{-7} D_p \ll T$, $D_p \ll 10^{7}\, T$

Condition est vérifiée.

$\Rightarrow \forall t \in [0, D_p]$, $x\left(t-\tau-\frac{v}{c}\cos\theta t\right) \simeq x(t-\tau)$

$$\boxed{y(t) = \mu\, e^{-2i\pi f_0 \tau}\, e^{-2i\pi \Delta f t}\, x(t-\tau) + b(t)}$$