Notes du cours de Mathématiques L3/S7

du 14/10/2021

Compléments d'intégration

I] Intégrales du type $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ où f est à valeurs réelles

<u>Définition</u> Soit $f(x)$ une fonction définie sur $[a,+\infty[$, et intégrable sur $[a,b]$, $\forall\, b > a$. On dit que $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge si $\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx$ existe et est finie. Dans ce cas, on pose :

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

Exemple et contre-exemples

- Si $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ et $a = 1$.

$$\int_1^b f(x)\,dx = \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \left(-\frac{1}{x}\right)_b^1 = 1 - \frac{1}{b} \longrightarrow 1 \text{ si } b \to +\infty$$

$\Rightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ est convergente, et vaut $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$

- Si $f(x) = \dfrac{1}{x}$

$$\int_1^b \frac{dx}{x} = \left(\operatorname{Log} x\right)_1^b = \operatorname{Log} b \longrightarrow +\infty$$

~~On dit~~ Donc, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ n'est pas convergente. Comme $\displaystyle\lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = +\infty$, on note $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = +\infty$

- Si $f(x) = \cos x$

$$\int_0^b f(x)\,dx = \int_0^b \cos x\,dx = \left(\sin x\right)_0^b = \sin b$$ qui n'a pas de limite quand $b \to +\infty$

Cas des fonctions à valeurs positives

Si $f(x) \geq 0 \quad \forall x \geqslant a$, $b \to \int_a^b f(x)dx$ est croissante. Donc, $\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$ existe toujours. La limite vaut soit $+\infty$ $\left(\text{et on note } \int_a^{+\infty} f(x)dx = +\infty \right)$, soit elle est finie, et on note $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx < +\infty$

~~Cuto~~

Exemple:

Si $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$, $a>0$,

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} < +\infty \iff \alpha > 1$$

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = +\infty \iff \alpha \leq 1$$

Critère de la convergence absolue

Si $\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx < +\infty$, alors, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est convergente. On dit alors que l'intégrale est absolument convergente.

Critères de comparaison

Premier critère. Soient f et g 2 fonctions positives sur $[a,+\infty[$

Si $\quad f(x) \leq g(x) \quad \forall x \geq a \quad$, alors :

Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx < +\infty$, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)\,dx < +\infty$

Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$, $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx = +\infty$

Preuve: Si $\displaystyle\int_a^{\infty} g(x)\,dx < +\infty$: $\displaystyle\int_a^{b} f(x)\,dx \leq \int_a^{b} g(x)\,dx \quad \forall b \geq a$

car $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \geq a$. Comme $\displaystyle\lim_{b\to+\infty} \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^{\infty} g(x)\,dx < +\infty$,

on obtient que $\displaystyle\int_a^{b} f(x)\,dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$

Donc, $\displaystyle\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{\infty} f(x)\,dx \leq \int_a^{\infty} g(x)\,dx < +\infty$

Exemple: $a = 1$ et $f(x) = \dfrac{|\cos x|}{x^2}$. $|f(x)| \leq \dfrac{1}{x^2}$, $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} < +\infty$ implique $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,dx < +\infty$

Deuxième critère

On dit que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$ si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Alors, si f et g sont positives sur $[a, +\infty[$, et si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$,

$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ sont de même nature

Preuve : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ implique que si $\varepsilon > 0$

et $\varepsilon < 1$, $1-\varepsilon < \dfrac{f(x)}{g(x)} < 1+\varepsilon$ pour x assez

grand. Donc, $f(x) < (1+\varepsilon)\, g(x) \quad \forall x > A$

~~et g(x)~~ Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx < +\infty$, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$.

De même, $(1-\varepsilon)\, f(x) < g(x) \quad \forall x > A$.

Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x) = +\infty$, alors, $\displaystyle\int_a^{\infty} g(x)\,dx = +\infty$

(6)

Exemple

$$f(x) = \frac{x^5 + 2x^4\cos x + 3x^3\sin^2 x + 5x\log x + 1}{x^7 + 3x^6\sin x + 8x^5\log x + 2x^4\cos^2 x + \cancel{1}}.$$

$$f(x) = \frac{x^5(1+\varepsilon_1(x))}{x^7(1+\varepsilon_2(x))} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_1(x) \to 0 \text{ si } x \to +\infty$$

et $\varepsilon_2(x) \to 0$ si $x \to +\infty$. Donc, $f(x) > 0$ à partir d'un certain rang, et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$

Donc, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$

Remarque

Dans les différents résultats, l'hypothèse $f(x) \geq 0$ n'a pas besoin d'être vérifiée sur tout l'intervalle d'intégration. Il suffit qu'elle le soit pour $x > A$, où A est un réel pouvant être plus grand que A. Idem dans le premier critère de comparaison concernant la condition $f(x) \leq g(x)$ qui doit être vraie $\forall x > A$, où A peut être plus grand que a.

II] Intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ avec f réelle

On dit que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ est convergente si $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ et $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$

sont toutes les deux convergentes. Dans ce cas, on pose

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$$

Critère de ~~comparaison~~ de la convergence absolue

Si $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx < +\infty$, alors $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ est convergente.

On dit qu'elle est absolument convergente

III] Intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ avec f à valeurs complexes

$f(x) = f_1(x) + i f_2(x)$ $\quad f_1(x), f_2(x) \in \mathbb{R}$.

On dit que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ est convergente si $\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\,dx$ et $\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x)\,dx$ sont

convergentes. Dans ce cas on pose

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\,dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x)\,dx.$$