Traitement du Signal Analogique

Notes du cours du 13/09/2021

I] Introduction

. Signal : fonction $t \to x(t)$ censée représenter une quantité physique de nature diverse : courant électrique, différence de potentiel, pression, force, vitesse, position, ...

. Traitement du Signal Discipline dont le but est de développer des méthodologies indépendantes de la nature des signaux, et permettant de :

- Transmettre des signaux (Telecom, Radar)
- D'analyser des signaux pour en extraire des informations (Radar, Reconnaissance de la Parole, Analyse des vibrations de structures mécaniques, ...)
- D'effectuer des prétraitements utiles (Filtrage)

Plan du cours

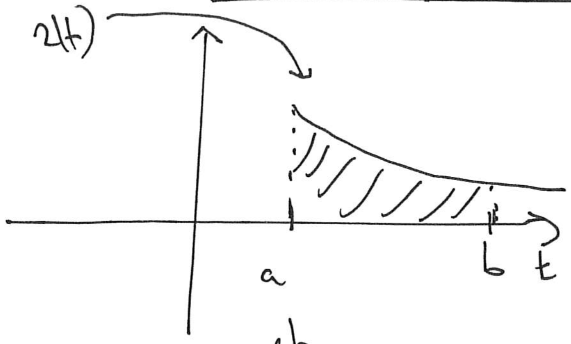
- Outils mathématiques nouveaux : convolution, transformée de Fourier
- Filtrage des signaux à temps continu
-

Transformée de Fourier

I] Préliminaires : Intégrales indéfinies de fonctions à valeurs complexes

But : si $x(t) = x_1(t) + i\, x_2(t)$ est une fonction à valeurs complexes, définir $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, dt$.

I-1] $\int_{a}^{+\infty} x(t)\, dt$ avec a réel



$\int_a^b x(t)\, dt$. Donner un sens à $\int_a^{+\infty} x(t)\, dt$, donc faire tendre b vers $+\infty$.

<u>Définition</u> On dit que $\int_a^{+\infty} x(t)\, dt$ est convergente si $\lim_{A \to +\infty} \int_a^A x(t)\, dt$ existe et est finie. Dans ce cas, on pose $\lim_{A \to +\infty} \int_a^A x(t)\, dt = \int_a^{+\infty} x(t)\, dt$.

<u>Cas particulier</u> Si $r(t) \geq 0$ sur $[a, +\infty[$,

$A \longrightarrow \int_a^A r(t)\,dt$ est croissante, donc

$\lim_{A \to +\infty} \int_a^A r(t)\,dt$ existe toujours. Si la limite est finie, on dit que $\int_a^{+\infty} r(t)\,dt < +\infty$. Si la limite vaut $+\infty$, on dit que $\int_a^{+\infty} r(t)\,dt = +\infty$. Attention, ceci n'a de sens que si $r(t) \geq 0$.

<u>Théorème de la convergence absolue.</u>

Si $\int_a^{+\infty} |r(t)|\,dt < +\infty$, $\int_a^{+\infty} r(t)$ est convergente.

On dit que l'intégrale est absolument convergente

[-2] $\int_{-\infty}^{+\infty} r(t)\,dt$ avec $r(t)$ réelle

On dit que $\int_{-\infty}^{+\infty} r(t)\,dt$ est convergente si $\int_0^{+\infty} r(t)\,dt$ est convergente et si $\int_{-\infty}^{0} r(t)\,dt$ l'est aussi. Dans ce cas, on pose

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} x(t)\,dt + \int_{0}^{+\infty} x(t)\,dt.$$

Si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\,dt < +\infty$, alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt$ est convergente

[-3] $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt$ avec $x(t)$ à valeurs complexes

---

$x(t) = x_1(t) + i\,x_2(t)$

On dit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt$ est convergente si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t)\,dt$ sont convergentes. Dans ce cas,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)\,dt + i\int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t)\,dt$$

Si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\,dt < +\infty$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)$ est convergente

c'est le module ici

Exemples basiques

$$x(t) = \frac{1}{t^\alpha}$$

Si $t > 1$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} < +\infty$

Si $t \leq 1$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = +\infty$

II] Classe de signaux

- Énergie finie : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt < +\infty$ exemple $x(t) = \dfrac{1}{1+|t|}$

- Signaux stables. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\, dt < +\infty$ exemple $x(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$

- $x(t) = e^{-\alpha t} \cos(2\pi \nu_0 t + \varphi)\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t)$

  $\alpha > 0$

  Si $\alpha = 0$, ça ne marche plus

- Signaux de puissance moyenne finie.

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2\, dt < +\infty \triangleq \text{Puissance moyenne du signal}$$

Exemple : $x(t) = A e^{2i\pi\nu_0 t + i\varphi}$ (sinusoïde complexe)

$x(t) = A\cos(2\pi\nu_0 t + \varphi)$ (sinusoïde réelle)

$$(x(t))^2 = A^2\cos^2(2\pi\nu_0 t + \varphi) = \frac{A^2}{2}\left(1 + \cos(4\pi\nu_0 t + 2\varphi)\right)$$

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\,dt = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(\frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2}\cos(4\pi\nu_0 t + 2\varphi)\right)dt$$

$$= \frac{A^2}{2} + \underbrace{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\frac{A^2}{2}\cos(4\pi\nu_0 t + 2\varphi)\,dt}_{\downarrow \; 0 \text{ si } T \to +\infty}$$

III] Produit de convolution

Définition

$x(t)$ et $y(t)$ 2 signaux. On définit le produit de convolution de x avec y comme le signal z défini par

$$z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s)\, y(t-s)\, ds \triangleq (x * y)(t)$$

Remarque : $x * y$ n'est pas nécessairement bien défini car $z(t)$ est donné par une intégrale indéfinie.

2 conditions d'existence :

a) Si x et y sont stables $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < +\infty, \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)| dt \right)$

b) Si $x(t) = y(t) = 0$ si $t < 0$: x et y sont des signaux causaux. Dans ce cas,

$$\begin{cases} z(t) = 0 \text{ si } t < 0 \\ z(t) = \int_0^t x(s)\, y(t-s)\, ds \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$$

Plus d'intégrale indéfinie.

Propriété du produit de convolution

$(x*y)(t) = (y*x)(t)$ pour tout t

Preuve $\int_{-\infty}^{+\infty} x(s)\, y(t-s)\, ds$. On pose $u = t - s$ $\Rightarrow du = -ds$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(s)\, y(t-s)\, ds = \int_{+\infty}^{-\infty} x(t-u)\, y(u)\, (-du) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(u)\, x(t-u)\, du = (y*x)(t)$$

IV] Transformée de Fourier

IV]-1 Définition

$x(t)$ tel que $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\, dt < +\infty$. On appelle transformée de Fourier de x la fonction $\hat{x}(\nu)$ définie pour $\nu \in \mathbb{R}$ par :

$$\hat{x}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-2i\pi\nu t}\, dt$$

Remarques

- $\left| x(t)\, e^{-2i\pi\nu t} \right| = |x(t)|$ Donc, $\int_{-\infty}^{+\infty} \left| x(t)\, e^{-2i\pi\nu t} \right| dt < +\infty$

donc $\hat{x}(\nu)$ définie pour tout $\nu \in \mathbb{R}$.

- $\hat{x}(\nu)$ est en général un nombre complexe, même si $x(t) \in \mathbb{R}$ pour tout t : $e^{-2i\pi\nu t} = (\cos 2\pi\nu t - i \sin 2\pi\nu t)$

$$\Rightarrow \hat{x}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos 2\pi\nu t - i \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin 2\pi\nu t\, dt$$