Filtrage des signaux à temps continu I.

Produit de convolution

Définition.

$x(t)$ et $y(t)$ deux signaux. Le produit de convolution $x * y$ est le signal $z(t) = (x * y)(t)$ donné par

$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s)y(t-s)ds$

Propriétés immédiates.

- $x * y = y * x$
- $(x * y) * z = x * (y * z)$

Produit de convolution II

Propriétés essentielles.

- $x * \delta = \delta * x = x$
- Si $z(t) = (x * y)(t)$, alors $Z(f) = X(f)Y(f)$

La transformée de Fourier transforme le produit de convolution en produit simple.

Définition d'un filtre.

Dispositif physique tel que:

$y(t) = (h * x)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(s)x(t-s)ds$

$x(t)$ entrée du filtre, $y(t)$ sortie du filtre.

Réponse impulsionnelle et fonction de transfert.

La fonction $h(t)$ est appelée réponse impulsionnelle du filtre.

$h(t)$ est la sortie si $x(t) = \delta(t)$.

Filtre réalisable physiquement $\Rightarrow h(t) = 0$ pour $t < 0$. Condition supposée réalisée à partir de maintenant

Premiers exemples.

- Filtre moyenneur, $h(t) = \frac{1}{T}\mathbf{1}_{[0,T]}(t)$, $y(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} x(s)ds$
- Filtre intégrateur, $h(t) = \Upsilon(t) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}+}(t)$, $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(s)ds$

Fonction de transfert

Fonction de transfert définie par $H(f) = \int_0^\infty h(t) e^{-2i\pi f t} dt$.

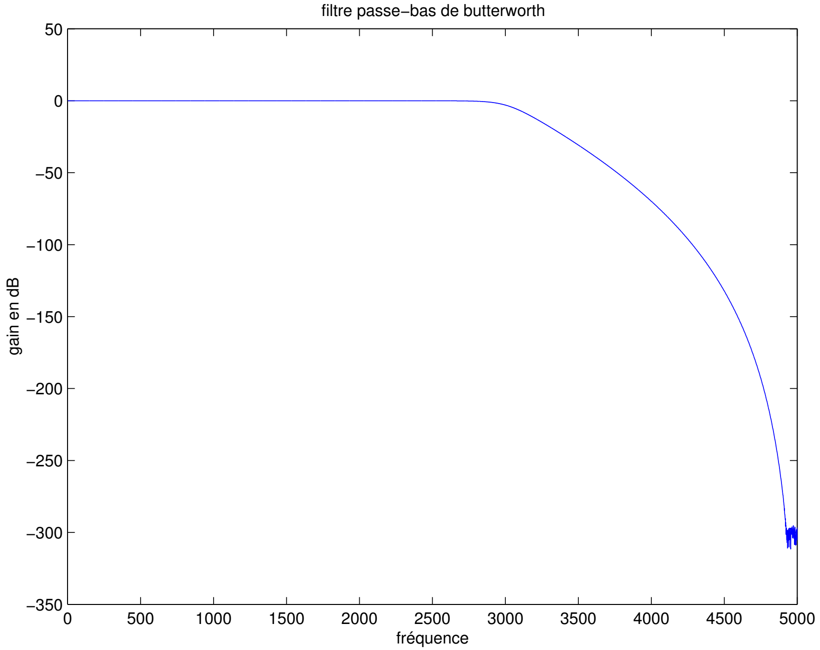
$H(f)$ transformée de Fourier de $h(t)$.

Relation entrée/sortie dans le domaine de Fourier : $Y(f) = H(f)X(f)$

Un filtre peut supprimer des bandes de fréquences contribuant au signal $x(t)$.

Filtres passe-bas et passe-bandes I

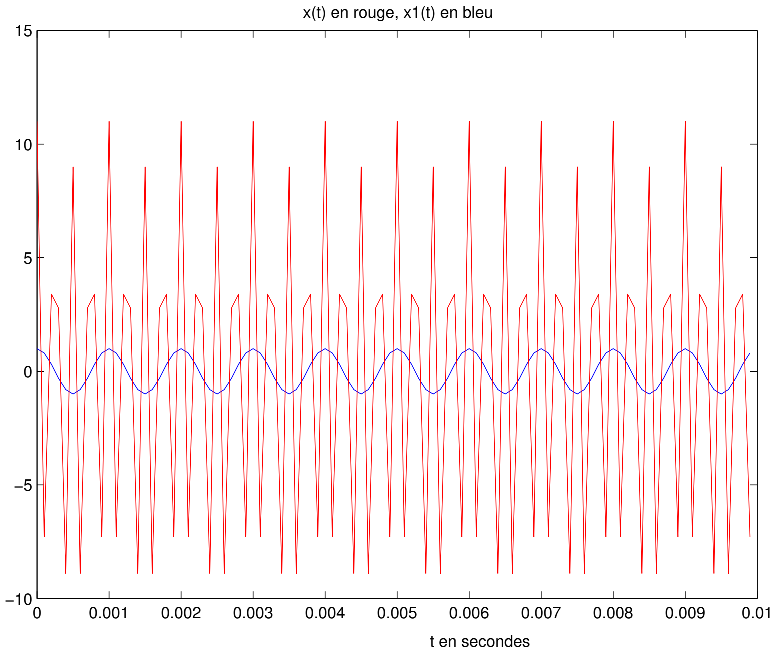
Filtre passe-bande, allure de la fonction de transfert.



Filtres passe-bas et passe-bandes II

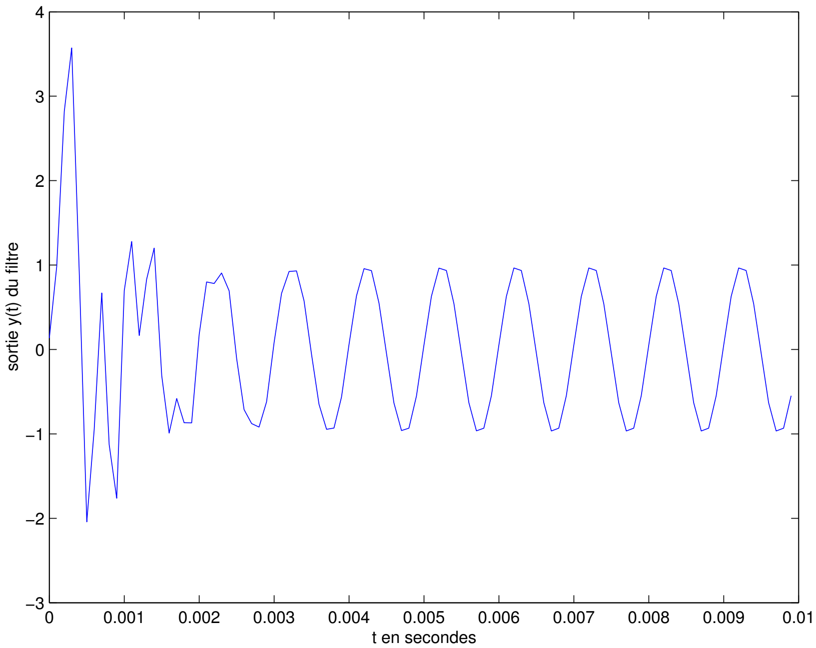
Visualisation de l'effet du filtre.

$$x_1(t) = \cos 2\pi f_1 t,\ x(t) = x_1(t) + 10\cos 2\pi f_2 t \text{ avec } f_1 = 1KHz,\ f_2 = 4KHz.$$



Filtres passe-bas et passe-bandes III

Visualisation de l'effet du filtre.



Stabilité des filtres

Un filtre est stable si toute entrée bornée produit une sortie bornée

INDISPENSABLE EN PRATIQUE

Critère de stabilité.

- $\int_0^\infty |h(t)| dt < \infty$

Premiers exemples.

- Filtre moyenneur: stable
- Filtre intégrateur: instable

Filtres stables en régime harmonique

Filtre stable, $\int_0^{+\infty} |h(t)| dt < +\infty$.

Sortie $y(t)$ quand $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \psi)$

Si $\phi(f_0) = \mathrm{Arg}(H(f_0))$, $y(t)$ est égal à:

$y(t) = A|H(f_0)|\cos(2\pi f_0 t + \psi + \phi(f_0))$

Entrée sinusoidale de fréquence f_0, sortie sinusoidale de fréquence f_0.

Preuve si $\psi = 0$

- $y(t) = A \int_0^{+\infty} h(s) \cos(2\pi f_0 (t-s)) ds$
- $y(t) = \frac{A}{2} \int_0^{+\infty} h(s) \left(e^{2i\pi f_0 (t-s)} + e^{-2i\pi f_0 (t-s)} \right) ds$
- $y(t) = \frac{A}{2} e^{2i\pi f_0 t} \int_0^{+\infty} h(s) e^{-2i\pi f_0 s} ds + \frac{A}{2} e^{-2i\pi f_0 t} \int_0^{+\infty} h(s) e^{2i\pi f_0 s} ds$
- $y(t) = \frac{A}{2} e^{2i\pi f_0 t} H(f_0) + \frac{A}{2} e^{-2i\pi f_0 t} H(f_0)^*$
- $y(t) = \mathrm{Re} \left(A e^{2i\pi f_0 t} H(f_0) \right) = A |H(f_0)| \cos(2\pi f_0 t + \phi(f_0))$

Introduction au régime transitoire

Que se passe-t-il si l'entrée est $u(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \psi)\mathbf{1}_{\mathbb{R}+}(t)$? Quel rapport entre la sortie $z(t)$, et $y(t)$?

Si $t \geq 0$, $z(t) = \int_0^{+\infty} h(s)u(t-s)ds = \int_0^t h(s)x(t-s)ds$

$y(t) - z(t) = \int_t^{+\infty} h(s)x(t-s)ds$

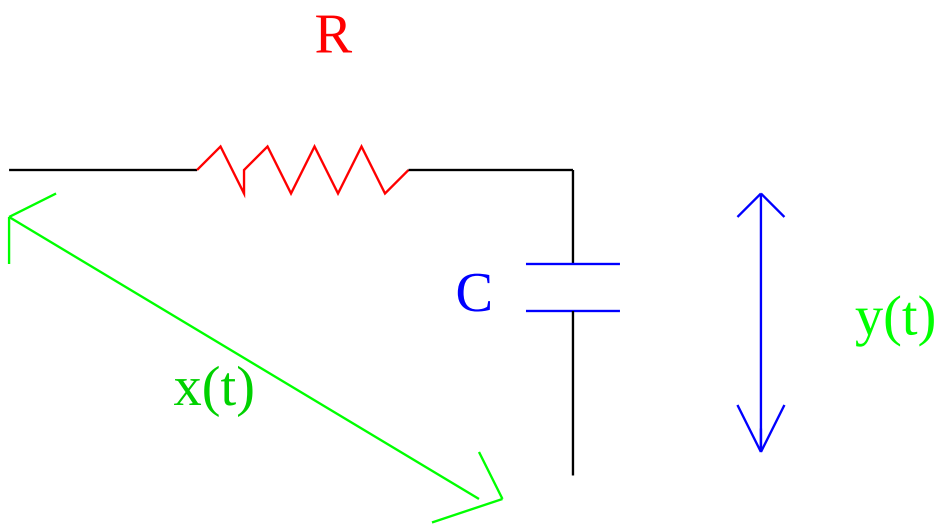
$|y(t) - z(t)| \leq A \int_t^{+\infty} |h(s)|ds \to 0$ si $t \to +\infty$

Au bout d'un certain temps, le régime transitoire s'éteint, et $z(t)$ se rapproche du régime permanent.

La vitesse d'extinction du régime transitoire dépend de la vitesse avec laquelle $h(t)$ tend vers 0 si t grandit.

Comment réalise-t-on des filtres ? I

Exemple.



$x(t) = RCy'(t) + y(t)$.

$X(f) = (2i\pi fRC + 1)Y(f)$ d'où

$Y(f) = H(f)X(f)$ avec $H(f) = \frac{1}{1+(2i\pi fRC}$.

Comment réalise-t-on des filtres ? II

Cas plus général.

Relation d'entrée / sortie du type :

$$a_0 y(t) + a_1 y^{'}(t) + \ldots a_p y^{(p)}(t) = b_0 x(t) + b_1 x^{'}(t) + \ldots b_q x^{(q)}(t)$$

Prise de la transformée de Fourier des 2 membres:

$$(a_0 + (2i\pi f) a_1 + \ldots (2i\pi f)^p a_p) Y(f) = (b_0 + (2i\pi f) b_1 + \ldots (2i\pi f)^q b_q) X(f)$$

$Y(f) = H(f)X(f)$ avec

$$H(f) = \frac{B(2i\pi f)}{A(2i\pi f)} = \frac{(b_0 + (2i\pi f) b_1 + \ldots + (2i\pi f)^{(q)} b_q)}{(a_0 + (2i\pi f) a_1 + \ldots (2i\pi f)^{(p)} a_p)}.$$