Notions sur les signaux aléatoires.

Introduction

Signaux dont on ne peut connaitre les valeurs avant des les avoir observés : imprévisibles.

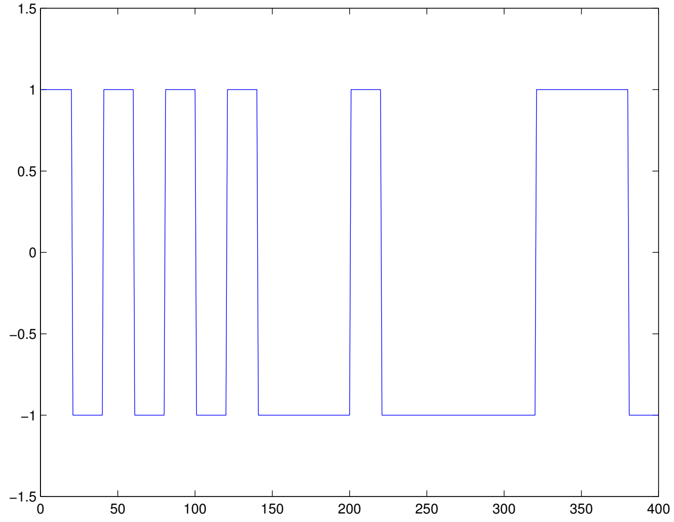
Mise en évidence de techniques permettant d'évaluer des propriétés statistiques (i.e. moyennes) pour en avoir une meilleure connaissance quantitative.

Exemples.

- Le bruit de fond $b(t)$
- Signal $x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n g(t - nT)$ transmis par un système de communication : la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est aléatoire.

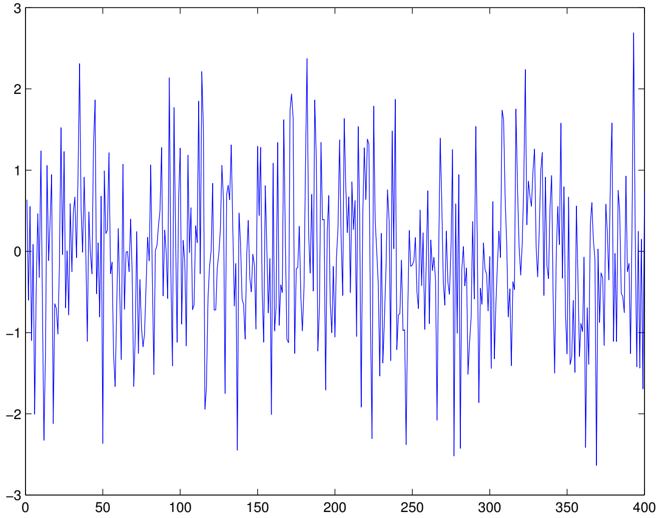
Réalisation d'un signal aléatoire II.

Exemple 1 : $\sum_n a_n g(t - nT)$



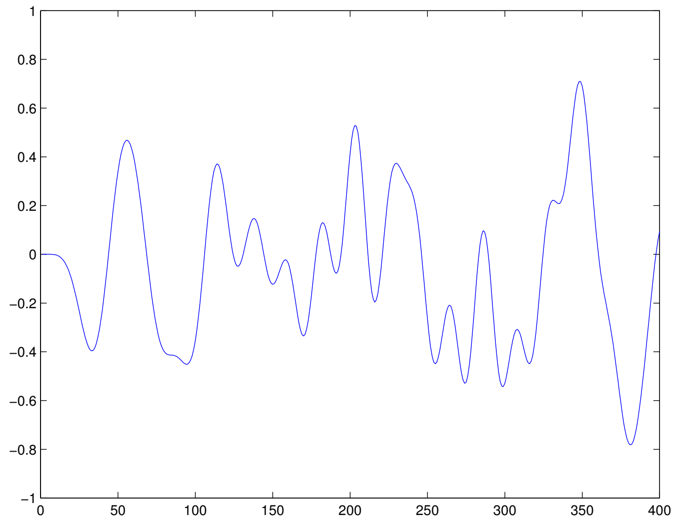
Réalisation d'un signal aléatoire III.

Exemple 2 : bruit de fond.



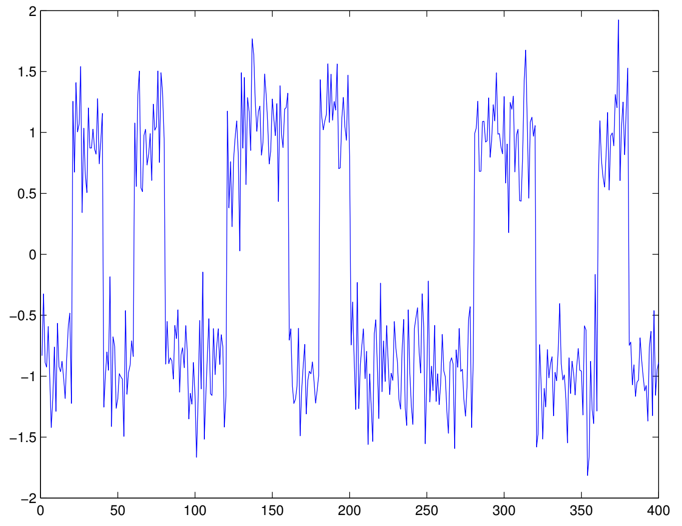
Réalisation d'un signal aléatoire IV.

Exemple 3 : bruit de fond filtre.



Réalisation d'un signal aléatoire V.

Exemple 4 : créneau bruité, SNR=10dB.



Signaux aléatoires stationnaires I.

$x(t)$ est dit stationnaire (au sens large) si

- $E(x(t)) = m$ est indépendant de t
- $E(x(t+\tau)x(t)^*) = R(\tau)$ est indépendant de t.
- $E|x(t)|^2 = R(0)$ puissance moyenne

Exemples de signaux aléatoires stationnaires.

- Le bruit blanc : $E(x(t) = 0$ et $E(x(t+\tau)x(t)^* = N_0\delta(\tau)$
- La sortie d'un filtre excité par un bruit blanc.

Propriété importante : la sortie d'un filtre excité par un signal aléatoire stationnaire est encore stationnaire.

Signaux aléatoires stationnaires II.

Exemple de signal aléatoire non stationnaire.

$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n g(t - nT)$ où la suite a est indépendante et identiquement distribuée (moyenne nulle et variance 1).

- $E(x(t)) = 0$ pour tout t, indépendant de t
- $E(x(t+\tau)x(t)^*) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(t+\tau-nT)g(t-nT)$, dépendant de t.

$t \rightarrow E(x(t+\tau)x(t))$ est périodique de période T : signal cyclostationnaire.

Fonction d'autocorrélation de $x(t)$: $R(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T E(x(t+\tau)x(t)^*)dt$

$R(0) = \frac{1}{T}\int_0^T E|x(t)|^2 dt$ puissance moyenne

Densité spectrale des signaux (cyclo-)stationnaires I.

Motivation : Définir une quantité qui représente la puissance moyenne du signal à chaque fréquence.

$x(t)$ aléatoire stationnaire : $\left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2i\pi f t} dt \right|^2$: 2 problèmes.

- Quantité a priori aléatoire, dépend de la trajectoire
- N'a pas de sens mathématique en théorie car $x(t)$ ne tend pas vers 0 si $|t| \to \infty$.

Densité spectrale des signaux (cyclo-)stationnaires II.

La bonne définition.

$$S(f) = \lim_{A \to \infty} E \left[\frac{1}{2A} \left| \int_{-A}^{A} x(t) e^{-2i\pi f t} dt \right|^2 \right]$$

- Le terme $\frac{1}{2A}$ avec $A \to +\infty$ évite la divergence de l'intégrale
- L'opérateur d'espérance mathématique exprime le caractère moyen de $S(f)$

Densité spectrale des signaux (cyclo-)stationnaires IV.

Propriétés de la densité spectrale.

- $S(f) \geq 0$ pour tout f
- Si $x(t)$ est (cyclo-)stationnaire, alors $S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-2i\pi f \tau} d\tau$
- $R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{2i\pi f \tau} df$, $R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) df$
- Si $y(t)$ est la sortie du filtre $H(f)$ excité par $x(t)$, $S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f)$.

Densité spectrale des signaux (cyclo-)stationnaires V.

Exemples.

- Le bruit blanc, $E(x(t+\tau)x(t)^*) = N_0\delta(\tau)$: $S(f) = N_0$ pour tout f
- Le bruit blanc dans la bande $[-B, B]$: $S(f) = N_0$ si $f \in [-B, B]$ et 0 ailleurs
- Le bruit blanc passe bande: $S(f) = \frac{N_0}{2}$ si $f \in [f_0 - B, f_0 + B] \cup [-f_0 - B, -f_0 + B]$
- $x(t) = \sum_n a_n g(t - nT)$, $S(f) = \frac{|G(f)|^2}{T}$.

La bande passante de $\sum_n a_n g(t - nT)$ = bande passante de $g(t)$.

Echantillonnage des signaux aléatoires.

Le théorème de Shannon est encore vérifié.

Si la bande passante de $x_a(t)$ est $[-B, B]$, et si $T_e < \frac{1}{2B}$, alors :

$$x_a(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_a(nT_e) \frac{\sin(\frac{\pi(t-nT_e)}{T_e})}{\frac{\pi(t-nT_e)}{T_e}}$$

Signaux aléatoires stationnaires à temps discret I.

Suite $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de variables aléatoires.

Stationnaire si $E(x_n) = m$ (on prendra $m = 0$), et si $E(x_{n+k} x_k^*) = R_n$ indépendant de k.

$(R_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ fonction d'autocrrélation de x.

Le bruit blanc : $E(x_{n+k} x_k^*) = \sigma^2 \delta(k)$

Signaux aléatoires stationnaires à temps discret II.

Densité spectrale des signaux stationnaires à temps discret.

Défini par :

$$S(f) = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} E\left[\left| \sum_{n=-N}^{N} x_n e^{-2i\pi n f} \right|^2 \right]$$

Si $E(x_{n+k} x_k^*) = \sigma^2 \delta(k), S(f) = \sigma^2$.

Signaux aléatoires stationnaires à temps discret III.

Propriétés fondamentales :

- $S(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} R_n e^{-2i\pi n f}$
- si x est réel, $S(-f) = S(f)$
- Si y est la sortie du filtre $H(f)$ excité par x, $S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f)$

$x_n = x_a(nT_e)$ avec $x_a(t)$ stationnaire. Si $T_e < \frac{1}{2B}$, $S_x(f) = F_e S_{x_a}(f F_e)$