Université de Marne la Vallée
Licence EEA
Année 2001-2002

Examen de Mathématiques

- *La durée de cette épreuve est de 1h15 mn.*
- *L'usage de documents, des notes personnelles des étudiants ainsi que de dispositifs électroniques n'est pas autorisé.*

Questions de cours

1. Soit x une fonction sommable paire. Que peut-on dire de la parité de sa transformée de Fourier ?
2. Enoncer, sans la démontrer, la propriété de symétrie de correspondance de la transformée de Fourier, pour les fonctions sommables.
3. Démontrer cette même propriété pour les fonctions de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.
4. Dans une table de transformées de Fourier, on trouve que la transformée de Fourier de $\ln\left(\dfrac{t^2+b^2}{t^2+c^2}\right)$ est $\dfrac{e^{-2\pi|cf|}-e^{-2\pi|bf|}}{\pi^2|f|}$ où $(b,c)\in\mathbb{R}^2$. En déduire la transformée de Fourier de $\dfrac{e^{-2\pi|ct|}-e^{-2\pi|bt|}}{\pi^2|t|}$.

Exercice

Soit α la fonction linéaire définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \alpha(t) = -\jmath 2\pi t.$$

1. Montrer que
$$\alpha\delta = 0.$$
2. En utilisant la transformée de Fourier, montrer que les solutions $S \in \mathcal{S}'$ de l'équation
$$\alpha S = 0$$
sont de la forme $S = c\,\delta$ où $c \in \mathbb{C}$.
Note. On admettra le résultat suivant : si Q est une distribution tempérée et $Q' = 0$ alors $Q = c\,T_1$ où $c \in \mathbb{C}$ et T_1 désigne la distribution régulière associée à la fonction constante, de valeur égale à 1.

3. Soit V la distribution définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}, \quad V(\varphi) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \Big(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\varphi(t)}{t}\, dt + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t}\, dt \Big).$$

   Vérifier que $\alpha V = -\jmath 2\pi T_1$.
4. En utilisant les deux questions précédentes, donner une solution particulière de l'équation

$$\alpha S = T_1 \qquad \text{où } S \in \mathcal{S}',$$

   puis résoudre cette dernière.
5. Soit U l'échelon de Heaviside. Rappeler le lien existant entre U et δ. En déduire que la transformée de Fourier de U est de la forme :

$$\mathcal{F}U = \frac{1}{\jmath 2\pi} V + c\,\delta, \qquad c \in \mathbb{C}.$$

6. Soit φ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(t) = e^{-\pi t^2}.$$

   En remarquant que φ appartient à $\mathcal{S}$, préciser la valeur de c dans l'expression de $\mathcal{F}U$.
   Note. On rappelle que la transformée de Fourier de φ est $\widehat{\varphi} = \varphi$.