

<b>TD 1 de Mathématiques</b> <b>Compléments d'intégration (1)</b>
--

**Exercice 1**

1. Soit  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ . Pour quelles valeurs de  $r \in \mathbb{R}_+$ , la fonction  $x$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad x(t) = \frac{1}{(1 + \alpha t)^r}$$

est-elle sommable sur  $[1, \infty[$ ? Que vaut alors son intégrale sur cet intervalle?

2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , donner un encadrement de  $x(t)$  pour  $t \in [n, n + 1]$ .  
3. En déduire un encadrement de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + \alpha n)^r}.$$

**Exercice 2**

Soit la fonction  $x$  définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = \frac{1 + t}{1 + t^2}.$$

1. Que vaut  $\int_A^B x(t) dt$  pour  $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ ?  
2. En déduire  $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A x(t) dt$ .  
3. La fonction  $x$  est-elle sommable sur  $\mathbb{R}$ ?

**Exercice 3**

1. Calculer

$$\int_0^1 \ln(1 + t) dt.$$

2. En déduire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(2n)!}{n^n n!} \right)^{1/n}.$$