

TD 1 de Mathématiques Compléments d'intégration (1)
--

Exercice 1

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Pour quelles valeurs de $r \in \mathbb{R}_+$, la fonction x définie sur \mathbb{R}_+ par

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad x(t) = \frac{1}{(1 + \alpha t)^r}$$

est-elle sommable sur $[1, \infty[$? Que vaut alors son intégrale sur cet intervalle?

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donner un encadrement de $x(t)$ pour $t \in [n, n + 1]$.
3. En déduire un encadrement de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + \alpha n)^r}.$$

Exercice 2

Soit la fonction x définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = \frac{1 + t}{1 + t^2}.$$

1. Que vaut $\int_A^B x(t) dt$ pour $(A, B) \in \mathbb{R}^2$?
2. En déduire $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A x(t) dt$.
3. La fonction x est-elle sommable sur \mathbb{R} ?

Exercice 3

1. Calculer

$$\int_0^1 \ln(1 + t) dt.$$

2. En déduire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(2n)!}{n^n n!} \right)^{1/n}.$$