Licence EEA
2002 - 2003

TD 2 de Mathématiques
Compléments d'intégration (2)

Exercice I
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par

$$\forall t \in [0,1], \quad x_n(t) = n^\alpha \, t \, e^{-nt}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Quelle est la limite de la suite $(x_n(t))_{n\in\mathbb{N}^*}$, pour tout $t \in [0,1]$?
2. Appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue.
3. Recommencer la même étude quand

$$\forall t \in [0,1], \quad x_n(t) = \begin{cases} n - n^2 t & \text{si } t < 1/n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice II
Soit $x(t_1,t_2) = e^{-t_1 t_2} - 2e^{-2t_1 t_2}$, $(t_1,t_2) \in \mathbb{R}_+^2$.

1. Montrer que

$$\int_1^\infty x(t_1,t_2)\,dt_1 = h(t_2)$$
$$\text{et} \int_0^1 x(t_1,t_2)\,dt_2 = h(t_1)$$

   où h est une fonction qu'on précisera.
2. Etudier le signe de h.
3. La fonction x est-elle sommable sur $[1,\infty[\times[0,1]$?

Exercice III
1. Calculer

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) dx\,dy \; .$$

2. En déduire

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \; .$$