Licence EEA
2002 - 2003

Transformée de Fourier (1)

Exercice I
Soit $\beta \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer qu'on peut définir la TF de la fonction

$$x(t) = \begin{cases} e^{-\beta t} & \text{si } t \in \mathbb{R}_+ \\ 0 & \text{si } t \in \mathbb{R}_-^* \end{cases}$$

   Calculer cette TF.

2. En déduire sans calcul, les TF des fonctions

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in \mathbb{R}_+ \\ e^{\beta t} & \text{si } t \in \mathbb{R}_-^* \end{cases}$$

   et $u(t) = e^{-\beta|t|}$, $t \in \mathbb{R}$.

3. Quelle est la TF de $v(t) = e^{-\beta|t|}\cos(2\pi t)$?
4. En déduire celle de $w(t) = e^{-\beta|t-1/4|}\sin(2\pi t)$.

Exercice II
Soit $x \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}_-, \qquad x(t) = 0.$$

1. Donner l'expression de $x * x$. Calculer ce produit de convolution pour la fonction x vue dans l'exercice précédent.
2. Soit y la fonction définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad y(t) = x(-t).$$

   Montrer que $y * y$ se déduit de $x * x$. Appliquer ce résultat à la fonction y de l'exercice I.

3. Donner l'expression générale du produit de convolution de x avec y. Montrer qu'il s'agit d'une fonction paire. Calculer $x * y$ dans le cas des fonctions de l'exercice précédent.
4. Quelles sont les TF des produits de convolution précédents ? Retrouve-t-on les propriétés de symétrie mises en évidence dans les questions 2 et 3 ?

Exercice III
Soit $x \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ tel que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt = 1 \ .$$

1. On définit la fonction

$$y_{a,f_0,\tau}(t) = K \, x\Big(\frac{t-\tau}{a}\Big) \exp\big(\jmath 2\pi f_0 \frac{t-\tau}{a}\big)$$

   où $(K,a) \in \mathbb{R}_+^{*2}$ et $(f_0,\tau) \in \mathbb{R}^2$.
   Calculer K de façon à ce que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y_{a,f_0,\tau}(t)|^2 \, dt = 1.$$

2. Quelle est la TF de $y_{a,f_0,\tau}$?