Licence EEA
2002 - 2003

TD 4 de Mathématiques
Transformée de Fourier (2)

Exercice I
Soit $x \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.

1. Justifier de manière rigoureuse la relation

$$\forall (t_0, \lambda) \in \mathbb{R}^2, \qquad \int_{-\lambda}^{\lambda} \widehat{x}(f) e^{\jmath 2\pi t_0 f}\, df = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_0 - t) \frac{\sin(2\pi\lambda t)}{\pi t}\, dt$$

2. Déduire du théorème de Jordan que, si x a des dérivées à gauche et à droite de 0 et est continue en 0 alors

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} x(0) &= \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^{\infty} x(t) \frac{\sin(\lambda t)}{t}\, dt \\ &= \lim_{\lambda\to\infty} \int_{-\infty}^{0} x(t) \frac{\sin(\lambda t)}{t}\, dt \end{aligned}$$

   (lemme de Dirichlet).

3. En déduire que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}(t)\, dt = \pi \ .$$

   Ceci signifie-t-il que $\mathrm{sinc}(t)$ est sommable ?

4. Calculer

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t}\, dt \ .$$

Exercice II
On considère la fonction $x(t) = e^{-\pi t^2}$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que x vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
2. Montrer que la transformée de Fourier $\widehat{x}$ de x vérifie la même équation différentielle.
3. En déduire que

$$\forall f \in \mathbb{R}, \qquad \widehat{x}(f) = \lambda\, e^{-\pi f^2}$$

   où $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

4. En utilisant la propriété de symétrie par correspondance de la TF, déterminer la valeur de λ.

5. Quelle est la TF de
$$y_\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\Big(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\Big)$$
où $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$? Déduire des propriétés de la TF, la valeur de
$$\int_{-\infty}^{\infty} y_\sigma(t)\, dt \ .$$
6. Que vaut la TF de $(y_{\sigma_1} * y_{\sigma_2})(t)$ où $(\sigma_1, \sigma_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$?
7. En déduire l'expression de $y_{\sigma_1} * y_{\sigma_2}$.