Licence EEA
2002 - 2003

TD 6 de Mathématiques
Transformée de Fourier des fonctions de carré sommable

Exercice I
A l'aide de l'égalité de Parseval, calculer

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}$$

où $(a,b) \in \mathbb{R}_+^{*2}$.
(On rappelle que la TF de $2c/(4\pi^2t^2+c^2)$ où $c \in \mathbb{R}_+^*$ est $e^{-c|f|}$.)

Exercice II
On considère les fonctions

$$x_n(t) = \operatorname{sinc}\big(\pi(t-n)\big), \quad n \in \mathbb{Z} .$$

1. Que vaut la transformée de Fourier de x_n ?
2. Montrer que
$$\forall (n,m) \in \mathbb{Z}^2, \quad \langle x_n, x_m \rangle = \delta_{n-m}$$
où $\delta_n = 1$ si $n = 0$ et 0 sinon.
(On dit alors que $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ forme une famille orthonormale de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.)
3. Que vaut
$$\int_{-\infty}^{\infty} x_n(t)\, L \operatorname{sinc}\big(\pi L(t-n)\big)\, dt$$
si $L \in \mathbb{R}$, $L \geq 1$?
4. Quelle est la TF de $x_n(t)^2$?
5. Calculer
$$\int_{-\infty}^{\infty} x_n(t)^2\, L \operatorname{sinc}\big(\pi L(t-n)\big)\, dt$$
si $L \in \mathbb{R}$, $L \geq 2$.

Exercice III
Soit une fonction Φ telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t)\, \Phi^*(t-n)\, dt = \delta_n$$

où $(\delta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est la suite de Kronecker.

1. Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite complexe et $N \in \mathbb{N}$. On considère

$$x_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} \alpha_n\, \Phi(t-n) \ .$$

   Montrer que $x_N \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et que

$$\|x_N\|^2 = \sum_{n=-N}^{N} |\alpha_n|^2 \ .$$

2. Montrer que la suite $(x_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ ssi $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$.
3. Vérifier que si $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n| < \infty$ alors $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$. On supposera dans la suite que la première condition est satisfaite.
4. Quelle est la TF de x_N ?
5. Quelle est celle de la limite de x_N ?