

TD 7 de Mathématiques
Distributions (1)

Exercice I

Parmi les applications définies ci-dessous, préciser celles qui sont des distributions :

- $\forall \varphi \in \mathcal{D}, T_1(\varphi) = \int_0^1 \varphi(t) dt$;
- $\forall \varphi \in \mathcal{D}, T_2(\varphi) = \int_0^1 |\varphi(t)| dt$;
- $\forall \varphi \in \mathcal{D}, T_3(\varphi) = \sum_{k=0}^N \varphi^{(k)}(0)$ où $N \in \mathbb{N}$;
- $\forall \varphi \in \mathcal{D}, T_4(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^{(k)}(k)$.

Exercice II

1. La fonction $\ln |t|$ est-elle localement sommable sur \mathbb{R} ?
2. Montrer que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$,

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\varphi(t)}{t} dt + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt \right)$$

est définie.

3. Soit

$$V : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\varphi \longmapsto \text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt .$$

V est-elle une distribution ? (V est appelée *valeur principale de $1/t$*).

4. Quel est le lien entre V et $T_{\ln|t|}$?

Exercice III

On définit la transposée \tilde{T} d'une distribution tempérée T par

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}, \quad \tilde{T}(\varphi) = T(\tilde{\varphi})$$

où $\forall t \in \mathbb{R}, \tilde{\varphi}(t) = \varphi(-t)$. Par ailleurs, T est dite impaire si $\tilde{T} = -T$.
Montrer que la TF d'une distribution tempérée impaire est impaire.