Licence EEA
2002 - 2003

TD 8 de Mathématiques
Distributions (2)

Exercice 1
Soit T une distribution tempérée et soit α_k le monôme défini par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \alpha_k(t) = (-\jmath 2\pi t)^k.$$

Démontrer que la transformée de Fourier de $\alpha_k T$ est

$$\mathcal{F}[\alpha_k T] = (\mathcal{F}[T])^{(k)}.$$

Exercice 2
Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite complexe.

1. Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}$
$$\sum_{n=-N}^{N} c_n T_{\exp(\jmath 2\pi n t)} = T_{\sum_{n=-N}^{N} c_n \exp(\jmath 2\pi n t)}.$$
2. Si $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$, montrer que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n T_{\exp(\jmath 2\pi n t)}$ est sommable dans $\mathcal{D}'$, de somme T_x où
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(\jmath 2\pi n t).$$
3. Vérifier que, si $c_n = \mathrm{o}(|n|^\alpha)$ (quand $|n| \to \infty$), avec $\alpha \in \mathbb{R}$, alors
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{n^p}\, T_{\exp(\jmath 2\pi n t)}$$
est sommable pour tout $p \in \mathbb{N}$, $p > \alpha + 1$.
4. En déduire que, si $c_n = \mathrm{o}(|n|^\alpha)$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, alors
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n T_{\exp(\jmath 2\pi n t)}$$
est sommable.

Exercice 3

On considère la fonction périodique, de période 1, telle que

$$\forall t \in [0,1[, \quad x(t) = (t-1/2)^2.$$

1. A quel espace appartient T_x ? Que valent T'_x et T''_x ?
2. Calculer les coefficients de Fourier de $x(t)$, donnés par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(x) = \int_0^1 x(t)\exp(-\jmath 2\pi n t)\,dt.$$

3. Vérifier que

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(x)\ \exp(\jmath 2\pi n t).$$

(On rappelle qu'une fonction périodique continue, de coefficients de Fourier sommables, est égale à sa série de Fourier.)

4. En utilisant les résultats de l'exercice précédent, en déduire que

$$T_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(x)\,T_{\exp(\jmath 2\pi n t)}.$$

5. En dérivant deux fois, en déduire que

$$\tilde{\delta}_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_{\exp(\jmath 2\pi n t)}$$

où $\tilde{\delta}_1$ est le peigne de Dirac de période 1.