ESE
$3^{\grave{e}me}$ *année*
section ACS

Examen écrit de traitement d'images

- *La durée de l'épreuve est de 3h00.*
- *L'usage des documents distribués à l'école et des notes personnelles des étudiants est autorisé.*
- *L'examen comporte trois parties indépendantes. L'ordre dans lequel elles seront abordées est indifférent.*

Partie 1

Répondre de façon claire et concise aux questions suivantes concernant l'article *Statistical texture characterization from discrete wavelet representations* de G. Vand de Wouver, P. Scheunders et D. Van Dyck, paru dans la revue *IEEE Transactions on Image Processing* en Avril 1999.

1. Quelles sont les applications de l'analyse de textures ?
2. En quoi la décomposition en ondelettes utilisée dans cet article diffère-t-elle de l'analyse multirésolution usuelle ?
3. Que représente la matrice de co-occurrence ?
4. Comment le modèle d'histogramme a-t-il été validé par les auteurs ? Cela vous paraît-il entièrement probant ?
5. Quelles conclusions peut-on tirer du tableau II ?

Partie 2

En imagerie satellite, on emploie souvent des capteurs en quinconce. Ceux-ci ne permettent de mesurer les valeurs du champ 2D $(f_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}$ considéré que pour les points de coordonnées $(n,m)\in I$, où I désigne l'ensemble des couples entiers de même parité :

$$I = \left\{(n,m)\in\mathbb{Z}^2 \mid (n \text{ et } m \text{ pairs}) \text{ ou } (n \text{ et } m \text{ impairs})\right\}.$$

Dans la suite, on supposera que $(f_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}$ est sommable de façon à pouvoir définir les transformées de Fourier (TF) des champs traités.

1. A partir des mesures, on construit l'image

$$\widehat{f}_{n,m} = \begin{cases} f_{n,m} & \text{si} \quad (n,m)\in I \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   Calculer la TF $\widehat{F}(\nu_x,\nu_y)$ de $\widehat{f}_{n,m}$ à partir des TF $F_{\mathrm{P}}(\nu_x,\nu_y)$ de $(f_{2p,2q})_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2}$ et $F_{\mathrm{I}}(\nu_x,\nu_y)$ de $(f_{2p+1,2q+1})_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2}$. (On supposera que l'échantillonnage est rectangulaire de pas L suivant les directions horizontale et verticale).

2. Exprimer $\widehat{F}(0,0)$ à partir des $f_{n,m}$.
3. Dans la suite, on cherche à estimer les valeurs de $f_{n,m}$ aux points où l'on ne dispose pas de mesures. Pour réaliser cette opération d'interpolation, on applique à $\widehat{f}_{n,m}$ un filtre de réponse impulsionnelle (sommable) $(h_{k,l})_{(k,l)\in\mathbb{Z}^2}$. La sortie de ce filtre sera notée $\widetilde{f}_{n,m}$.
   Quelles conditions doit-on imposer à cette réponse impulsionnelle pour que, quel que soit le champ $f_{n,m}$, on ait $\widetilde{f}_{n,m} = f_{n,m}$ pour tout $(n,m) \in I$?
4. Quelle condition supplémentaire doit-on introduire afin que, pour tout champ $f_{n,m}$, on ait
$$2 \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} \widehat{f}_{n,m} = \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} \widetilde{f}_{n,m} \; ?$$
5. On choisit comme support du filtre d'interpolation
$$\mathcal{S} = \big\{(k,l) \in \mathbb{Z}^2 \mid |k| + |l| \leq 2\big\}.$$
   En supposant que le filtre est isotrope, donner les valeurs de ses coefficients.

Partie 3

Une image réelle $(f_{n,m})_{0\leq n<N, 0\leq m<M}$ où $(N,M) \in (\mathbb{N}^*)^2$ a pour transformée en cosinus discrète (TCD) $(F_{k,l})_{0\leq k<N, 0\leq l<M}$. On suppose que les coefficients $F_{k,l}$ sont décorrélés et suivent des lois de probabilité gaussiennes centrées de variances respectives $\sigma_{k,l}^2 = \rho^{k+l}$ où $0 < \rho < 1$.

1. Les hypothèses faites sur les coefficients $F_{k,l}$ vous paraissent-elles réalistes ? Commenter.
2. Quelle est la puissance moyenne de l'image :
$$P_f = \frac{1}{NM} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \mathrm{E}\{f_{n,m}^2\} \; ?$$
   Montrer que la relation obtenue permet de déterminer aisément la valeur du coefficient ρ quand $N \gg 1$ et $M \gg 1$.
3. Donner la densité de probabilité conjointe des coefficients transformés.
4. L'image $f_{n,m}$ est altérée par un bruit additif $b_{n,m}$ qui est blanc, gaussien, centré, de variance σ_b^2 connue. Montrer que sa TCD $(B_{k,l})_{0\leq k<N, 0\leq l<M}$ a des caractéristiques statistiques identiques. (On pourra raisonner à partir des représentations vectorielles $\mathbf{b}$ et $\mathbf{B}$ de $b_{n,m}$ et $B_{k,l}$.)
5. De plus, l'image $f_{n,m}$ est obtenue à l'aide d'un capteur qui introduit une distorsion linéaire. Le processus de dégradation global est décrit par l'équation
$$G_{k,l} = H_{k,l} F_{k,l} + B_{k,l}$$
   où $(G_{k,l})_{0\leq k<N, 0\leq l<M}$ est la TCD de l'image $(g_{n,m})_{0\leq n<N, 0\leq m<M}$ observée et $H_{k,l} = \mu^{k+l}$, $\mu \in]0,1[$ étant une constante supposée connue, qui est caractéristique du système de mesure.
   Que vaut la loi conditionnelle conjointe des $G_{k,l}$ sachant les $F_{k,l}$?
6. Donner l'expression de l'estimateur MAP des $F_{k,l}$ à partir des $G_{k,l}$.
7. En déduire un schéma bloc indiquant comment s'effectue la restauration du champ $f_{n,m}$ à partir de $g_{n,m}$.