Transformations par bloc

Travail à réaliser

1. A l'aide de la fonction `imread`, charger l'image `texture.pgm` (récupérable sur le Web). De quel type d'image s'agit-il ? La visualiser avec la commande `imshow`.
2. Effectuer la DFT de l'image. On pourra utiliser la fonction `fft(.,-1)` mais il conviendra de diviser le résultat obtenu par $\sqrt{NM}$ – N et M désignant les dimensions de l'image traitée – de façon à normaliser la DFT (c'est-à-dire assurer son unitarité).
3. Calculer l'énergie de l'image et celle des coefficients transformés. Qu'observe-t-on ?
4. Visualiser en échelle logarithmique les modules des coefficients transformés. Quelle symétries apparaissent-elles ? Interpréter l'image obtenue. Calculer le rapport en dB entre le maximum du module des coefficients et leur minimum.
5. Réaliser la DFT inverse. On pourra également utiliser la fonction `fft(.,1)` mais en multipliant, cette fois, le résultat par $\sqrt{NM}$. Mesurer l'énergie de l'erreur de reconstruction.
6. Ecrire une fonction permettant de calculer la DCT de l'image. Une façon (non optimisée) de calculer la DCT est de définir la matrice transformée $[g] = (g_{k,\ell})_{0\leq k<N, 0\leq \ell<M}$ par
$$[g] = W_1[f]W_2^\top \tag{1}$$
où $[f] = (f_{n,m})_{0\leq n<N, 0\leq m<M}$ représente l'image originale et W_1 et W_2 sont des matrices dont les éléments sont donnés respectivement par
$$W_1(k,n) = c(k)\sqrt{\frac{2}{N}}\cos\Big(\pi k\frac{(2n+1)}{2N}\Big)$$
et
$$W_2(\ell,m) = c(\ell)\sqrt{\frac{2}{M}}\cos\Big(\pi \ell\frac{(2m+1)}{2M}\Big)$$
où $c(k) = 1/\sqrt{2}$ si $k = 0$ et 1 sinon. Quelles sont les avantages de cette transformation par rapport à la DFT ?
7. Recommencer les opérations effectuées en 3 et 4.
8. Ecrire une fonction mettant en œuvre la DCT inverse. Cette opération pourra être réalisée à l'aide de la formule :
$$[f] = W_1^\top[g]W_2.$$
Quelle est la justification théorique de l'expression ci-dessus ?
9. Vérifier le bon fonctionnement de cette fonction en reconstruisant l'image à partir de ses coefficients DCT.

10. La transformation de Walsh-Hadamard est définie par la relation (1) où les matrices W_1 et W_2 sont remplacées par des matrices $W_1(N)$ et $W_2(M)$ definies récursivement par

$$W_1(N) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} W_1(N/2) & W_1(N/2) \\ W_1(N/2) & -W_1(N/2) \end{bmatrix}$$

avec $W_1(1) = 1$ (relation similaire pour $W_2(M)$). Que se passe-t-il si, au lieu d'utiliser la DCT, on emploie la transformation de Walsh-Hadamard ?