DÉCONVOLUTION

Préliminaire

On considère :
- les représentations vectorielles $\mathbf{g}$ et $\widehat{\mathbf{f}}$ de deux images $(g_{n,m})_{0\leq n<N,0\leq m<M}$ et $(\widehat{f}_{n,m})_{0\leq n<N,0\leq m<M}$,
- la matrice de transformation H associée à un filtrage d'une image de dimension $N \times M$,
- la matrice de covariance R d'un vecteur image $\mathbf{f}$.

La relation

$$\widehat{\mathbf{f}} = (H^T H + \lambda R^{-1})^{-1} H^T \mathbf{g}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}_+,$$

peut être approximée efficacement à l'aide de techniques de FFT 2D. En effet, on montre que la DFT 2D, $(\widehat{F}_{k,l})_{0\leq k<N,0\leq l<M}$ de $(\widehat{f}_{n,m})_{0\leq n<N,0\leq m<M}$ vaut approximativement

$$\frac{H^*_{k,l} G_{k,l}}{|H_{k,l}|^2 + \lambda S^{-1}_{k,l}}. \tag{1}$$

où $(G_{k,l})_{0\leq k<N,0\leq l<M}$ est la DFT 2D de $(g_{n,m})_{0\leq n<N,0\leq m<M}$, $(H_{k,l})_{0\leq k<N,0\leq l<M}$ correspond à la réponse fréquentielle du filtre considéré (il s'agit plus exactement de la DFT 2D de sa réponse impulsionnelle) et $(S_{k,l})_{0\leq k<N,0\leq l<M}$ est la DFT 2D de la suite d'autorrélation $R(n,m) = \mathrm{E}\{f_{k,l} f_{k-n,l-m}\}$ de l'image $(f_{n,m})_{0\leq n<N,0\leq m<M}$ dont $\mathbf{f}$ est la réprésentation vectorielle. La suite $S_{k,l}$ correspond à la *densité spectrale* de puissance de l'image $f_{n,m}$.

Travail à réaliser

1. L'image $g_{n,m}$ correspond ici à la version dégradée de l'image d'origine $f_{n,m}$. Ces images sont téléchargeables ainsi que la réponse fréquentielle $H_{k,l}$ modélisant la distorsion du système de mesure.
2. Selon vous, de quel type de dégradation s'agit-il ? Calculer l'erreur quadratique moyenne entre l'image originale et sa version dégradée.
3. Déterminer le bruit de mesure en calculant la DFT 2D inverse (fonction fft(.,1)) de

   $$G_{k,l} - H_{k,l} F_{k,l}$$

   où $(F_{k,l})_{0\leq k<N,0\leq l<M}$ est la DFT 2D de $(f_{n,m})_{0\leq n<N,0\leq m<M}$. Vérifier que ce bruit est centré. Tracer son histogramme à l'aide de la commande histplot. Calculer son écart-type σ_b (fonction st_deviation).

   Dans la suite, on cherchera à produire une image restaurée $\widehat{f}_{n,m}$, à partir de l'image dégradée $g_{n,m}$. L'image originale $f_{n,m}$ (indisponible dans la réalité) est fournie afin de pouvoir évaluer l'erreur de restauration.
4. Comment doit-on choisir λ et $S_{k,l}$ dans l'expression (1), pour mettre en œuvre le *filtre inverse* ? Observer l'image reconstruite. Calculer ses valeurs minimale et maximale.
5. En choisissant des valeurs non nulles de λ et en prenant $S_{k,l} = 1$, on réalise une régularisation quadratique. Faire varier λ. Que se passe-t-il si ce paramètre est grand ? Quelle est la valeur optimale du facteur de régularisation ?
6. On modélise l'image $f_{n,m}$ par un bruit blanc d'écart-type σ_f. En posant $S_{k,l} = \sigma_f^2$ et $\lambda = \sigma_b^2$, la relation (1) correspond au filtre de Wiener. Mettre en œuvre ce filtre et mesurer ces performances.

   Comment cette méthode se situe-t-elle par rapport à la précédente ?

   Comment pourrait-on améliorer les résultats obtenus ?