Echantillonnage et interpolation d'images

1. A l'aide de la fonction `imread`, charger l'image du jour. Vérifier que cette image est carrée, de dimension $N \times N$ où l'on précisera la valeur de N. La visualiser avec la commande `imshow`.
2. Représenter le module de la transformée de Fourier de cette image en échelle logarithmique. Si `im` désigne l'image, on pourra utiliser la commande

   `imshow(log(fftshift(abs(fft(im,-1))))).`
3. Déterminer l'image après sous-échantillonnage rectangulaire d'un facteur 2 suivant les deux directions horizontale et verticale.
4. On cherche à ramener l'image sous-échantillonnée à la taille de l'originale. Pour ce faire, on peut utiliser une méthode d'interpolation par plus proche voisin. Cette méthode consiste simplement à remplacer chaque pixel de l'image échantillonnée par un bloc 2×2 de 4 pixels de même valeur. Vérifier que cette interpolation peut être mise en œuvre rapidement en utilisant la commande `kron`. Quels artefacts observe-t-on sur l'image interpolée ? Quelle est l'erreur quadratique moyenne par rapport à l'image originale ?
5. Représenter en échelle logarithmique le module de la TF de l'image interpolée. Interpréter le résultat obtenu.
6. Essayer maintenant une interpolation bilinéaire. Cette méthode consiste à remplacer les valeurs manquantes par la moyenne arithmétique de leur plus proches voisins. Ces voisins peuvent être au nombre de 2 ou de 4 selon la position du pixel considéré. (Les pixels sur la dernière ligne et la dernière colonne seront interpolés à l'aide de la méthode décrite à la question 4.) Comment cette technique se compare-t-elle à la précédente d'un point de vue visuel et aussi d'un point de vue quantitatif ?
7. Comparer les deux méthodes précédentes à l'interpolation de Shannon-Nyquist. Cette interpolation peut être obtenue de la manière suivante. Si `echant` est la matrice correspondant aux valeurs de l'image échantillonnées, l'image interpolée est donnée par

   `S*echant*S'`

   où `S` est la matrice de dimension $N \times (N/2)$ correspondant aux fonctions d'interpolations de Shannon-Nyquist. L'élément (n, m) de cette matrice, avec $n \in \{0, \dots, N-1\}$ et $m \in \{0, \dots, N/2-1\}$ vaut $\operatorname{sinc}(\pi(n-2m)/2)$. Comment peut-on expliquer le résultat de cette comparaison ?
8. Recommencer l'opération d'échantillonnage mais en ayant au préalable coupé les composantes haute-fréquence de l'image originale, à la moitié de la fréquence d'échantillonnage (filtrage anti-repliement). La DFT de la réponse impulsionnelle du filtre passe-bas correspondant peut s'obtenir à l'aide des instructions :

   ```
   ffiltre = [ones(N/4+1,1);zeros(N/2-1,1);ones(N/4,1)];
   ffiltre = ffiltre*ffiltre'
   ```
9. Réssayer l'interpolation de Shannon-Nyquist sur la nouvelle image sous-échantillonnée. Que devient l'erreur quadratique moyenne par rapport à l'image de départ ?
10. Trouver les valeurs minimale et maximale des champs interpolés aux questions 7 et 9. Que constate-t-on ? Que se passe-t-il si l'on ramène les valeurs interpolées à l'intervalle [0-255] par troncature ?