TRAITEMENT D'IMAGES

Notes de cours

J.-C. Pesquet

Institut Gaspard Monge et Lab-Info UMR CNRS 8049

IMAC - Université de Marne la Vallée

Propriétés de la TF 2D

– linéarité

$$\alpha f(x,y) + \beta g(x,y) \quad \longrightarrow \quad \alpha \hat{f}(\nu_x, \nu_y) + \beta \hat{g}(\nu_x, \nu_y)$$

– translations

  – spatiale

$$f(x - d_x, y - d_y) \quad \longrightarrow \quad \exp[-j2\pi(\nu_x d_x + \nu_y d_y)]\hat{f}(\nu_x, \nu_y)$$

  – fréquentielle

$$\exp[j2\pi(x\theta_x + y\theta_y)]f(x,y) \quad \longrightarrow \quad \hat{f}(\nu_x - \theta_x, \nu_y - \theta_y)$$

- dérivations
  - spatiale

$$\frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k \partial y^l}(x, y) \quad \longrightarrow \quad (j2\pi)^{k+l} \nu_x^k \nu_y^l \hat{f}(\nu_x, \nu_y)$$

C.P. :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad \longrightarrow \quad -4\pi^2(\nu_x^2 + \nu_y^2)\hat{f}(\nu_x, \nu_y)$$

  - fréquentielle

$$(-j2\pi)^{k+l} x^k y^l f(x, y) \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^{k+l} \hat{f}}{\partial \nu_x^k \partial \nu_y^l}(\nu_x, \nu_y)$$

- convolutions
  - spatiale

$$(f * g)(x,y) \quad \longrightarrow \quad \hat{f}(\nu_x,\nu_y)\hat{g}(\nu_x,\nu_y)$$

  où

$$\begin{aligned}(f * g)(x,y) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x',y')\, g(x-x',y-y')\, dx'\, dy' \\ &= (g * f)(x,y)\end{aligned}$$

  - fréquentielle

$$f(x,y)g(x,y) \quad \longrightarrow \quad (\hat{f} * \hat{g})(\nu_x,\nu_y)$$

– transformation linéaire

$$f'(x,y) = f(x',y') \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\mid \det \mathbf{A} \mid} \hat{f}(\nu'_x, \nu'_y)$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \nu'_x \\ \nu'_y \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-t} \begin{bmatrix} \nu_x \\ \nu_y \end{bmatrix}$$

C.P. :

$$f(ax, by) \rightarrow \tfrac{1}{|ab|} \hat{f}(\tfrac{\nu_x}{a}, \tfrac{\nu_y}{b})$$

$$f(\cos\phi x - \sin\phi y, \sin\phi x + \cos\phi y)$$

$$\rightarrow \hat{f}(\cos\phi \nu_x - \sin\phi \nu_y, \sin\phi \nu_x + \cos\phi \nu_y)$$

– symétrie hermitienne

$$f(x,y)^* \quad \rightarrow \quad \hat{f}(-\nu_x, -\nu_y)^*$$

C.P. :

$$f(x,y) \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \Re\{\hat{f}(\nu_x,\nu_y)\}\,\text{sym./(0,0)} \\ (\mid \hat{f}(\nu_x,\nu_y) \mid) \\ \Im\{\hat{f}(\nu_x,\nu_y)\}\,\text{antisym./(0,0)} \\ (\arg[\hat{f}(\nu_x,\nu_y)]) \end{cases}$$

– symétrie de correspondance

$$f(x,y) \rightarrow \hat{f}(\nu_x,\nu_y) \quad \Rightarrow \quad \hat{f}(-x,-y) \rightarrow f(\nu_x,\nu_y)$$

– séparabilité

$$f(x,y) = f_1(x) f_2(y) \quad \rightarrow \quad \hat{f}(\nu_x,\nu_y) = \hat{f}_1(\nu_x)\hat{f}_2(\nu_y)$$

où $\hat{f}_1$ et $\hat{f}_2$ TF 1D de f_1 et f_2

– égalités de Parseval-Plancherel

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, g(x,y)^*\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\nu_x,\nu_y)\, \hat{g}(\nu_x,\nu_y)^*\, d\nu_x\, d\nu_y$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mid f(x,y) \mid^2 \ dx\, dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mid \hat{f}(\nu_x,\nu_y) \mid^2 \ d\nu_x\, d\nu_y$$

Propriétés de la TZ 2D

- inversion

$$f_{n,m} = \frac{1}{(2j\pi)^2} \oint_{C_1^+} \oint_{C_2^+} F(z,w)\, z^{n-1}\, w^{m-1}\, dz\, dw$$

  où C_1^+ et C_2^+ sont deux contours fermés du domaine de convergence, orientés dans le sens trigonométrique
- linéarité

$$\alpha f_{n,m} + \beta g_{n,m} \quad \rightarrow \quad \alpha F(z,w) + \beta G(z,w)$$

- translation

$$f_{n-k,m-l} \quad \rightarrow \quad z^{-k} w^{-l} F(z,w)$$

– transposition

$$c^n d^m f_{n,m} \quad \to \quad F(\frac{z}{c}, \frac{w}{d})$$

– dérivation

$$\tfrac{(n+k-1)!}{(n-1)!}\tfrac{(m+l+1)!}{(m-1)!} f_{n,m} \quad \to \quad (-1)^{k+l}\frac{\partial^{k+l}F}{\partial z^k \partial w^l}(z,w)$$

– convolution

$$f_{n,m} * g_{n,m} \to F(z,w)G(z,w)$$

où

$$\begin{aligned} f_{n,m} * g_{n,m} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} f_{k,l}\, g_{n-k,m-l} \\ &= g_{n,m} * f_{n,m} \end{aligned}$$

– multiplication

$$f_{n,m}g_{n,m} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{(2j\pi)^2}\oint_{C_1^+}\oint_{C_2^+} F(z',w')\,G(\frac{z}{z'},\frac{w}{w'})\,\frac{dz'}{z'}\,\frac{dw'}{w'}$$

– transformation linéaire des indices

si $(p_{11},p_{12},p_{21},p_{22}) \in \mathbb{Z}^4$ et

$$f'_{n,m} = \begin{cases} f_{n',m'} & \text{si} \begin{cases} n = p_{11}n' + p_{12}m' \\ m = p_{21}n' + p_{22}m' \end{cases} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors

$$f'_{n,m} \quad \rightarrow \quad F(z^{p_{11}}w^{p_{21}}, z^{p_{12}}w^{p_{22}})$$

C.P. :

$$f_{\pm n,\pm m} \quad \rightarrow \quad F(z^{\pm 1}, w^{\pm 1})$$

– symétrie hermitienne

$$f^*_{n,m} \quad \longrightarrow \quad F(z^*, w^*)^*$$

– séparabilité

$$f_{n,m} = f^1_n f^2_m \quad \longrightarrow \quad F_1(z) F_2(w)$$

où $F_1(z)$ et $F_2(z)$ TZ 1D de f^1_n et f^2_m

– égalité de Parseval-Plancherel

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_{n,m} g^*_{n,m}$$

$$= \quad \frac{1}{(2j\pi)^2} \oint_{C_1^+} \oint_{C_2^+} F(z,w)\, G(\frac{1}{z^*}, \frac{1}{w^*})^* \, \frac{dz}{z} \, \frac{dw}{w}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mid f_{n,m} \mid^2$$

$$= \quad \frac{1}{(2j\pi)^2} \oint_{C_1^+} \oint_{C_2^+} F(z,w)\, F(\frac{1}{z^*}, \frac{1}{w^*})^* \, \frac{dz}{z} \, \frac{dw}{w}$$

– valeur initiale

si $f_{n,m} = 0$ pour $n < 0$ ou $m < 0$ alors

$$\begin{aligned}
\lim_{w \to \infty} F(z,w) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_{n,0}\, z^{-n} \\
\lim_{z \to \infty} F(z,w) &= \sum_{m=0}^{\infty} f_{0,m}\, w^{-m} \\
\lim_{z,w \to \infty} F(z,w) &= f_{0,0}
\end{aligned}$$

Caractéristiques des filtres 2D

- séparabilité
  - définition

$$h_{n,m} = h^1_n h^2_m$$

  - conséquence

$$g_{n,m} = h_{n,m} * f_{n,m} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h^1_k \, y_{n-k,m}$$

$$y_{n,m} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h^2_l \, f_{n,m-l}$$

- stabilité EBSB
  - définition

$$\left.\begin{array}{c} f_{n,m} \longrightarrow g_{n,m} \\ f_{n,m} \text{ borné} \end{array}\right. \Rightarrow g_{n,m} \text{ borné}$$

  - CNS
    $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \mid h_{k,l} \mid$ finie
    $\Leftrightarrow$ le bicercle unité appartient au domaine de définition de la TZ

– dynamisme

  – définition

$$g_{n,m} = \sum_{(k,l)\in\mathcal{A}} a_{k,l}\, f_{n-k,m-l} - \sum_{(k,l)\in\mathcal{B}^*} b_{k,l}\, g_{n-k,m-l}$$

  $\mathcal{A}$ sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}^2$

  $\mathcal{B}^*$ sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$

  – fonction de transfert

$$H(z,w) = \frac{\sum_{(k,l)\in\mathcal{A}} a_{k,l}\, z^{-k}\, w^{-l}}{1 + \sum_{(k,l)\in\mathcal{B}^*} b_{k,l}\, z^{-k}\, w^{-l}}$$

Filtres RIF de gradient horizontal

– filtres séparables

$$h_{n,m} = h^1_n h^2_m$$

– dérivation horizontale

$$(h^1_1 \;\; h^1_0 \;\; h^1_{-1}) = \frac{1}{2}(-1 \;\; 0 \;\; 1)$$

– passe-bas vertical

$$\begin{pmatrix} h^2_{-1} \\ h^2_0 \\ h^2_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ou } \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- filtres non séparables
  - filtre de Prewitt

$$\begin{pmatrix} h_{1,-1} & h_{0,-1} & h_{-1,-1} \\ h_{1,0} & h_{0,0} & h_{-1,0} \\ h_{1,1} & h_{0,1} & h_{-1,1} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

  - filtre de Kirsh

$$\begin{pmatrix} h_{1,-1} & h_{0,-1} & h_{-1,-1} \\ h_{1,0} & h_{0,0} & h_{-1,0} \\ h_{1,1} & h_{0,1} & h_{-1,1} \end{pmatrix} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} -3 & -3 & 5 \\ -3 & 0 & 5 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$