NOM : *M1 ET*
2008 - 2009

Examen de Traitement du Signal

- *La durée de cette épreuve est de 30 mn.*
- *L'usage des documents, des notes personnelles des étudiants ainsi que de tout type de dispositifs électroniques n'est pas autorisé.*
- *L'examen devra impérativement être traité sur cette feuille.*
- *Chaque question peut avoir une, plusieurs ou aucune réponse(s) correcte(s) parmi les choix proposés.*

1. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs complexes.
   |__| Si X et Y sont décorrélées, alors X et Y sont indépendantes.
   |__| Si X et Y sont indépendantes, alors X et Y sont décorrélées.
   |__| Si (X, Y) est gaussien et décorrélé, alors X et Y sont indépendantes.
   |__| Si (X, Y) est gaussien et indépendant, alors X et Y sont décorrélées.
2. Soit $\mathbf{X}$ un vecteur aléatoire réel de composantes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ indépendantes. En reprenant les notations du cours, on a alors, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,
   |__| $f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \ldots f_{X_n}(x_n)$
   |__| $f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_{X_1}(x_1) * \cdots * f_{X_n}(x_n)$
   |__| $F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \ldots F_{X_n}(x_n)$
   |__| $\varphi_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi_{X_1}(x_1) * \cdots * \varphi_{X_n}(x_n)$.
3. On considère un signal aléatoire à temps discret $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Ce signal est gaussien centré, de variance σ^2. La fonction caractéristique de la variable aléatoire X_n, avec $n \in \mathbb{Z}$, est égale à
   |__| $\forall u \in \mathbb{R}$, $\varphi_{X_n}(u) = e^{\frac{u^2\sigma^2}{2}}$
   |__| $\forall u \in \mathbb{R}$, $\varphi_{X_n}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2\sigma^2}{2}}$
   |__| $\forall u \in \mathbb{R}$, $\varphi_{X_n}(u) = e^{-\frac{u^2\sigma^2}{2}}$
   |__| $\forall u \in \mathbb{R}$, $\varphi_{X_n}(u) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{u^2\sigma^2}{2}}$.
4. Si X est un processus de Poisson, alors
   |__| $X(0) = 0$
   |__| pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $X(t)$ est entier
   |__| X est croissant au cours du temps
   |__| $\mathsf{E}[X(t)]$ est une fonction linéaire de t.
5. On considère une modulation numérique QPSK, en notant X le processus de modulation linéaire numérique associé.
   |__| Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t)$ est entier.
   |__| X est cloclostationnaire.
   |__| Les symboles transmis sont des variables aléatoires $(A_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ prenant leurs valeurs dans $\{-1, 1\}$.
   |__| Les symboles transmis sont des variables aléatoires $(A_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ prenant leurs valeurs dans $\{-1, -\imath, 1, \imath\}$.

6. On considère un signal aléatoire à temps discret $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ où, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $X_n = \cos(2\pi f n + \Phi)$ avec $f \in \mathbb{R}$, et Φ est une variable aléatoire uniformément distribuée sur $[0, 2\pi[$. La suite d'autocorrélation de $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est égale à

   $\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \gamma_X(k) =$

7. Un signal stationnaire X à temps continu, de densité spectrale de puissance S_X, est injecté en entrée d'un filtre analogique stable de réponse fréquentielle $\widehat{h}$. On note Y la sortie du filtre.
   |__| La densité spectrale de puissance de Y est, pour tout $f \in \mathbb{R}$, $S_Y(f) = \widehat{h}(f)S_X(f)$.
   |__| La densité spectrale de puissance de Y est, pour tout $f \in \mathbb{R}$, $S_Y(f) = |\widehat{h}(f)|^2 S_X(f)$.
   |__| La densité spectrale de puissance de Y est réelle, positive ou nulle.
   |__| S_Y se calcule à partir de S_X à l'aide de la formule des ingérences.

8. Un signal aléatoire stationnaire à temps discret, $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, vérifie la relation

   $$\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad X_n = B_n + \frac{1}{2}B_{n-1}$$

   où $(B_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc centré de variance σ^2. Le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est :
   |__| un modèle MA
   |__| un modèle AR
   |__| un filtre RIF
   |__| un filtre RII.

9. Quelle est la fonction de transfert du filtre générateur associé au modèle précédent ?

   $H(z) =$

10. Que vaut la densité spectrale de puissance du signal aléatoire $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ défini à la question 8 ?

    $S_X(f) =$