Université de Marne la Vallée
M1 ET

Traitement du Signal

TD N° 2

Exercice 1

Un marchand de journaux a une demande aléatoire X. La loi de probabilité de X (variable en réalité discrète) est modélisée par une loi continue de fonction de répartition $F_X(x)$ définie sur $[0, \infty[$.

1. La vente d'un journal assure au marchand un bénéfice a. En revanche, garder un journal invendu entraîne pour lui une perte b. Quelle est l'espérance mathématique du gain du marchand s'il dispose de x_0 journaux ?
2. Quel nombre de journaux x_0 doit-il se procurer pour rendre son espérance de gain maximale ?
3. Application numérique : la fonction de répartition vaut $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ avec $\lambda = 1/1000$. Calculer la moyenne et la variance de cette distribution. Quelle est la valeur optimale x_0 si $a = 2$ Euros et $b = 4$ Euros ?

Exercice 2

Etant donné une variable aléatoire réelle de densité de probabilité $f_X(x)$, on appelle écart absolu autour de $a \in \mathbb{R}$, la quantité $D(a) = \mathrm{E}\{|X - a|\}$.

1. Montrer que, si $\mathrm{E}\{|X|\} < \infty$, $D(a)$ est bien définie pour tout a.
2. La médiane m de la distribution est donnée par

$$\int_{-\infty}^{m} f_X(x)dx = \int_{m}^{\infty} f_X(x)dx.$$

   Montrer qu'on a

$$D(a) = D(m) + 2\int_{a}^{m} (x - a) f_X(x)dx.$$

   En déduire que l'écart absolu est minimal en m.

Exercice 3

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes réparties uniformément sur $[-a, a]$ et $[-b, b]$ respectivement, où $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Trouver la densité de probabilité de $Z = X + Y$.