Université de Marne la Vallée
M1 ET

Traitement du Signal
TD N° 3

Exercice 1
Soit X une variable gaussienne centrée d'écart-type σ. Donner les expressions de tous les moments de la variable X.

Exercice 2
Soit $\mathbf{X}$ un vecteur aléatoire gaussien réel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, de moyenne $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}$ et de matrice de covariance (non singulière) $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{X}}$.

1. Soit g une fonction de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$. Rappeler l'expression de $\mathsf{E}\{g(\mathbf{X})\}$, quand cette espérance est définie.
2. Lorsque g est égale à l'opposé du logarithme de la densité de probabilité $f_{\mathbf{X}}$ du vecteur aléatoire, l'espérance précédente fournit l'entropie différentielle du vecteur aléatoire $\mathbf{X}$:
$$H(\mathbf{X}) = -\mathsf{E}\{\ln\big(f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})\big)\}.$$
Effectuer le calcul de cette entropie.
3. On suppose que $n \geq 2$ et l'on décompose $\mathbf{X}$ sous la forme :
$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} \end{pmatrix}.$$
Que valent les entropies de $\mathbf{Y}$ et $\mathbf{Z}$?
4. On définit l'information mutuelle de $\mathbf{Y}$ et $\mathbf{Z}$ par
$$I(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = H(\mathbf{Y}) + H(\mathbf{Z}) - H(\mathbf{X}).$$
Calculer cette quantité.
5. Préciser l'expression obtenue dans le cas bivarié ($n = 2$). On note ρ le coefficient de corrélation entre les composantes Y et Z de $\mathbf{X}$. Pour quelles valeurs de ρ, l'information mutuelle est-elle maximale ?

Exercice 3
Soit $X_1, \dots, X_n$, $n \in \mathbb{N}^*$ variables aléatoires de Poisson d'intensités respectives $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ où $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et indépendantes. Quelle est la loi de probabilité de $\sum_{k=1}^n X_k$?