Université de Marne la Vallée
M1 ET

Traitement du Signal

TD N° 4

Exercice 1

On considère un processus aléatoire réel $X(t)$ défini pour $t \in \mathbb{N}^*$. Sa densité de probabilité d'ordre 2 est, pour tout $(t_1, t_2) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $t_1 \neq t_2$ et pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$f_{X(t_1),X(t_2)}(x_1, x_2) = K(t_1, t_2) \exp\Big(-\frac{|x_1|}{\alpha t_1} - \frac{|x_2|}{\alpha t_2}\Big)$$

où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Calculer la constante $K(t_1, t_2)$ en fonction de α, t_1 et t_2.
2. Déterminer la fonction de répartition conjointe de $X(t_1)$ et $X(t_2)$.
3. Calculer la densité de probabilité de $X(t)$ à un instant t donné.
4. Pour $t_1 \neq t_2$, $X(t_1)$ et $X(t_2)$ sont-ils indépendants ? Peut-on en conclure que $X(t)$ est un processus indépendant ?
5. Déduire des résultats précédents, l'espérance et l'autocorrélation de $X(t)$.

Exercice 2

Un processus aléatoire scalaire réel défini pour $t \in \mathbb{R}$ correspond à un signal de communication retardé d'un temps $\tau \in \mathbb{R}$ et dégradé par un bruit additif $B(t)$. Le récepteur dispose ainsi de $Y(t) = X(t-\tau) + B(t)$. On suppose que les fonctions de corrélation de X et B existent et que X et B sont centrés et mutuellement non corrélés.

1. Exprimer l'intercorrélation de $X(t)$ et $Y(t)$ en fonction de l'autocorrélation de $X(t)$.
2. Calculer l'autocorrélation de $Y(t)$ en fonction de celles de $X(t)$ et $B(t)$.
3. En déduire l'expression de l'erreur quadratique moyenne $\mathrm{E}\{[Y(t) - X(t)]^2\}$.

Exercice 3

Une promenade aléatoire est un processus aléatoire $X(t)$ défini pour tout $t \in \mathbb{N}$ par les relations :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{N}^*, \quad X(t) = X(t-1) + B(t) \\ X(0) = 0 \end{cases}$$

où $B(t)$ est un processus aléatoire réel centré, du second ordre qui est indépendant et de variance σ_B^2 constante au cours du temps.

1. Que vaut l'espérance de $X(t)$?
2. Calculer l'intercorrélation de $X(t)$ et $B(t)$, $R_{XB}(t_1, t_2)$ pour $t_2 \geq t_1 > 0$.
3. En déduire la puissance de $X(t)$.
4. Soient $(t_1, t_2) \in \mathbb{N}^2$ avec $t_2 > t_1$. Exprimer la fonction caractéristique de première espèce de $(X(t_1), X(t_2) - X(t_1))$.

5. En déduire que, si $t_2 > t_1$, $X(t_1)$ et $X(t_2) - X(t_1)$ sont des variables aléatoires indépendantes. Ce résultat était-il prévisible ?
6. Déterminer l'autocorrélation de $X(t)$.

Exercice 4

Deux signaux de communication $A_1(t)$ et $A_2(t)$ définis pour $t \in \mathbb{R}$ sont transmis par voie hertzienne. Deux antennes permettent de mesurer les signaux :

$$\begin{cases} X_1(t) = \alpha_1 A_1(t) + (1-\alpha_1) A_2(t) \\ X_2(t) = (1-\alpha_2) A_1(t) + \alpha_2 A_2(t) \ . \end{cases}$$

On supposera que $A_1(t)$ et $A_2(t)$ sont des processus aléatoires centrés du second ordre mutuellement décorrélés et que $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{C}^2$.

1. Déterminer l'expression de la matrice de corrélation du processus aléatoire vectoriel $\mathbf{X}(t) = [X_1(t)\ X_2(t)]^T$.
2. On suppose que $A_1(t)$ et $A_2(t)$ sont de même puissance non nulle. A quelle condition sur α_1 et α_2, les composantes de $\mathbf{X}(t)$ sont-elles des variables aléatoires décorrélées, à l'instant $t \in \mathbb{R}$?