Université de Marne la Vallée
M1 ET

Traitement du Signal

TD N° 5

Exercice I

On considère un processus de Poisson $X(t)$ défini pour $t \in \mathbb{R}_+$, de paramètre λ et on note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T(n)$ l'instant où $X(t)$ passe de la valeur $n-1$ à la valeur n.

1. Calculer la fonction de répartition de $T(1)$, puis la densité de probabilité de cette variable aléatoire.
2. Déterminer de façon similaire la densité de probabilité de $T(n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice II

Le nombre de clients se connectant à un serveur informatique est modélisé par un processsus de Poisson $X(t)$ de paramètre λ. On note $T(n)$ le temps d'arrivée du $n$ème client où $n \in \mathbb{N}^*$ et on suppose que ce dernier reste connecté au serveur pendant une durée $\Theta(n)$. On fait l'hypothèse que $(\Theta(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et identiquement distribuées qui sont indépendantes du processus aléatoire $X(t)$ et qui admettent une densité de probabilité.

1. Montrer que le nombre de clients présents à l'instant $t \in \mathbb{R}_+$ est
$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{T(n)+\Theta(n)>t}\, \mathbf{1}_{T(n)\leq t} \ .$$
2. En déduire que le nombre moyen de clients connectés est
$$\lambda \int_0^t P[\Theta(n) > t-u]\, du \ .$$
3. Donner l'expression du nombre moyen de clients connectés quand $\Theta(n)$ suit une loi exponentielle :
$$f_{\Theta(n)}(\theta) = \mu e^{-\mu\theta}, \quad \theta \in \mathbb{R}_+$$
où $\mu \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice III
Soit $Z(t) = Ae^{\jmath(2\pi ft+\Phi)}$ où A est une variable aléatoire réelle du deuxième ordre qui est indépendante de la variable aléatoire Φ, elle-même uniformément distribuée sur $[0, 2\pi[$.

1. Calculer l'espérance de ce processus.
2. Calculer son autocorrélation et montrer que les processus $Z(t)$ et $Z(t)^*$ sont mutuellement non corrélés.
3. Soient $X(t) = A\cos(2\pi ft + \Phi)$ et $Y(t) = A\sin(2\pi ft + \Phi)$. Déduire de la question précédente les autocorrélation de $X(t)$ et $Y(t)$ ainsi que l'intercorrélation de $X(t)$ et $Y(t)$.
4. Etudier la stationnarité des processus $Z(t)$, $X(t)$ et $Y(t)$.