Université de Marne la Vallée
M1 ET

Traitement du Signal

TP N° 1

Le but de ce TP est d'illustrer, à l'aide du logiciel Scilab certains concepts ayant trait aux signaux aléatoires.

Les phrases en italique correspondent à des questions qui doivent être préparées avant la séance de TP.

1 Notion d'ergodisme

On considère le signal aléatoire $X(n) = \sin(2\pi f_0 n + \Phi)$ où $f_0 = 1/64$ et Φ est une phase aléatoire uniformément répartie sur $[0, 2\pi[$ (fonction rand). Pour générer plusieurs réalisations de ce signal aléatoire, on peut effectuer le tirage aléatoire direct d'une matrice dont les lignes correspondent aux différentes réalisations et l'indice de colonne représente le temps.

Générez 4, 40 puis 400 réalisations de ce signal sur 128 points. Dans chaque cas, estimer les moyennes statistiques d'ordre 1 à chaque instant (fonction mean), puis déterminez les moyennes temporelles, pour chaque réalisation. Comparez les résultats obtenus. Qu'observez-vous ?

2 Estimation des fonctions de corrélation

Que vaut théoriquement la fonction d'autocorrélation $\gamma_X(k)$ du signal sinusoïdal ci-dessus ?

Pour calculer numériquement la fonction d'autocorrélation d'un signal aléatoire stationnaire (au sens faible) à partir d'une de ses réalisations $(x(n))_{0 \leq n < N}$, on peut faire appel à la fonction Scilab xcorr que vous pouvez télécharger à l'adresse suivante : http ://www-syscom.univ-mlv.fr/~pesquet/tsigalea.html. Deux estimations différentes de la fonction d'autocorrélation sont possibles :

– xcorr(X,'unbiased'), estimée non biaisée correspondant à la formule

$$\hat{\gamma}_X^{\mathrm{nb}}(k) = \begin{cases} \dfrac{1}{N-k} \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1-k} x(n)x(n+k) & \text{pour } k \in \{0, \ldots, N-1\} \\ \hat{\gamma}_X^{\mathrm{nb}}(-k) & \text{pour } k \in \{-N+1, \ldots, -1\} \end{cases}$$

– xcorr(X,'biased'), estimée biaisée donnée par

$$\hat{\gamma}_X^{\mathrm{b}}(k) = \begin{cases} \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1-k} x(n)x(n+k) & \text{pour } k \in \{0, \ldots, N-1\} \\ \hat{\gamma}_X^{\mathrm{b}}(-k) & \text{pour } k \in \{-N+1, \ldots, -1\}. \end{cases}$$

Comparez pour chacun de ses estimateurs les résultats calculés aux prédictions théoriques. *Que représente le "premier" coefficient d'autocorrélation $\gamma_X(0)$?* Sa valeur est-elle en accord avec les résultats expérimentaux ? Expliquez intuitivement les comportements observés pour les estimations de $\gamma_X(k)$ correspondant à de grandes valeurs de $|k|$.

3 Prédiction linéaire

La prédiction linéaire d'ordre 2 d'un signal aléatoire $X(n)$ stationnaire (au sens faible) consiste à calculer des coefficients réels a et b de façon à minimiser l'erreur quadratique moyenne :

$$\mathcal{E}(a,b) = \mathrm{E}\{[X(n) - aX(n-1) - bX(n-2)]^2\}.$$

La combinaison linéaire $aX(n-1) + bX(n-2)$ est ainsi déterminée de façon à approximer au mieux $X(n)$, à partir de ses valeurs "passées" $X(n-1)$ et $X(n-2)$. Le signal aléatoire résultant $Z(n) = X(n) - aX(n-1) - bX(n-2)$ est appelé erreur de prédiction.

En dérivant $\mathcal{E}(a,b)$ par rapport à a et b, vérifiez que ce problème conduit à la résolution du système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{bmatrix} \gamma_X(0) & \gamma_X(1) \\ \gamma_X(1) & \gamma_X(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_X(1) \\ \gamma_X(2) \end{bmatrix}.$$

Dans le cas du signal sinusoïdal étudié précédemment, quelles sont les expressions théoriques de a et b ainsi que celle de l'erreur de prédiction $Z(n)$?

Vérifiez ces résultats en remplaçant les valeurs théoriques de la fonction d'autocorrélation par des estimées calculées à l'aide de Scilab et en représentant graphiquement l'erreur de prédiction obtenue.