Université de Marne la Vallée
M1 ET

Traitement du Signal Avancé

TD N° 1

Estimation d'une cisoïde dans du bruit

On dispose de $n \in \mathbb{N}^*$ observations complexes :

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}, \qquad y_k = s_k + b_k$$

où $(b_k)_{1 \le k \le n}$ est un bruit de mesure et $(s_k)_{1 \le k \le n}$ est le signal cisoïdal

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}, \qquad s_k = a e^{\imath k \omega},$$

$a \in \mathbb{C}$ et $\omega \in [0, 2\pi[$ étant des paramètres inconnus. Le but de ce TD est d'estimer ces paramètres à l'aide des observations.

En décomposant les signaux en parties réelles et imaginaires, on obtient $2n$ observations réelles :

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}, \qquad \begin{cases} y_k^{\mathrm{R}} = a^{\mathrm{R}} \cos(k\omega) - a^{\mathrm{I}} \sin(k\omega) + b_k^{\mathrm{R}} \\ y_k^{\mathrm{I}} = a^{\mathrm{R}} \sin(k\omega) + a^{\mathrm{I}} \cos(k\omega) + b_k^{\mathrm{I}} \end{cases}$$

où u^{R} (resp. u^{I}) désigne la partie réelle (resp. imaginaire) d'un nombre complexe u.

Dans la suite, on supposera que $b_1^{\mathrm{R}}, \ldots, b_n^{\mathrm{R}}, b_1^{\mathrm{I}}, \ldots, b_n^{\mathrm{I}}$ sont des réalisations de variables aléatoires réelles $B_1^{\mathrm{R}}, \ldots, B_n^{\mathrm{R}}, B_1^{\mathrm{I}}, \ldots, B_n^{\mathrm{I}}$, indépendantes, gaussiennes, centrées et de variance σ^2.

1. Ecrire une fonction scilab permettant de générer le signal $(y_k)_{1 \le k \le n}$ pour des valeurs de n, a^{R}, a^{I}, ω et σ^2 passées en argument. Visualiser les parties réelle et imaginaire du signal obtenu pour différentes valeurs de ces paramètres.
2. On définit $\mathbf{y} = (y_1^{\mathrm{R}}, \ldots, y_n^{\mathrm{R}}, y_1^{\mathrm{I}}, \ldots, y_n^{\mathrm{I}})^\top$. De quel vecteur aléatoire réel $\mathbf{Y}$ de dimension $2n$, $\mathbf{y}$ est-il une réalisation ?
3. Montrer que la log-vraisemblance de ce vecteur aléatoire s'écrit

   $$\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \ln f_{\mathbf{Y}|a^{\mathrm{R}}, a^{\mathrm{I}}, \omega}(\mathbf{y}) = -\frac{1}{2\sigma^2}\Big(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^2 + n(a^{\mathrm{R}})^2 + n(a^{\mathrm{I}})^2 - 2a^{\mathrm{R}} R_n(\omega) - 2a^{\mathrm{I}} I_n(\omega)\Big) + C$$

   où C est une constante réelle qu'on précisera et $R_n(\omega)$ (resp. $I_n(\omega)$) est la partie réelle (resp. imaginaire) de

   $$Y_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n} y_k \, e^{-\imath k \omega}.$$

4. Quels sont les estimateurs au sens du maximum de vraisemblance, $\widehat{a}_{\mathrm{MV}}^{\mathrm{R}}$ et $\widehat{a}_{\mathrm{MV}}^{\mathrm{I}}$ de a^{R} et a^{I} quand ω est connu ?
5. En déduire que l'estimateur au sens du maximum de vraisemblance de ω est $\widehat{\omega}_{\mathrm{MV}}$ maximisant le périodogramme de $y_1, \ldots, y_n$, qui est défini par

   $$P_n(\omega) = \frac{1}{n} |Y_n(\omega)|^2.$$

6. On discrétise l'axe des fréquences, en déterminant le périodogramme en

$$\omega_p = 2\pi \frac{p}{P},$$

où P est le nombre de points en fréquence utilisés et p est un entier variant entre 0 et $P-1$. Comment peut-on alors calculer $\widehat{\omega}_{\mathrm{MV}}$ (ou, plus précisément, une approximation discrète de $\widehat{\omega}_{\mathrm{MV}}$) de manière rapide ?

7. En utilisant la question précédente, écrire une fonction scilab calculant les estimateurs au sens du maximum de vraisemblance de ω, a^{R} et a^{I}. Mettre en œuvre cet estimateur à partir de données obtenues à l'aide du programme développé à la question 1. Suivant les valeurs de n et σ^2, retrouvez-vous les valeurs des paramètres qui ont servi à générer les observations ? Etudier l'influence de P en distinguant le cas où il existe p_0 tel que $\omega = \omega_{p_0}$ et celui où ceci n'est pas vérifié.