

Algorithme primal-dual de points intérieurs pour l'estimation pénalisée des cartes d'abondances en imagerie hyperspectrale

E. Chouzenoux⁽¹⁾, S. Moussaoui⁽²⁾ et J. Idier⁽²⁾

(1) Université Paris-Est, Lab. d'Informatique Gaspard Monge

(2) IRCCyN, Ecole Centrale Nantes

GRETSI 2011, Bordeaux



1 Introduction

2 Approche proposée

- Intégration de la contrainte d'égalité
- Algorithme de points intérieurs primal-dual

3 Résultats expérimentaux

- Temps de calcul dans le cas non pénalisé
- Intégration d'une pénalisation spatiale

4 Conclusion

1 Introduction

2 Approche proposée

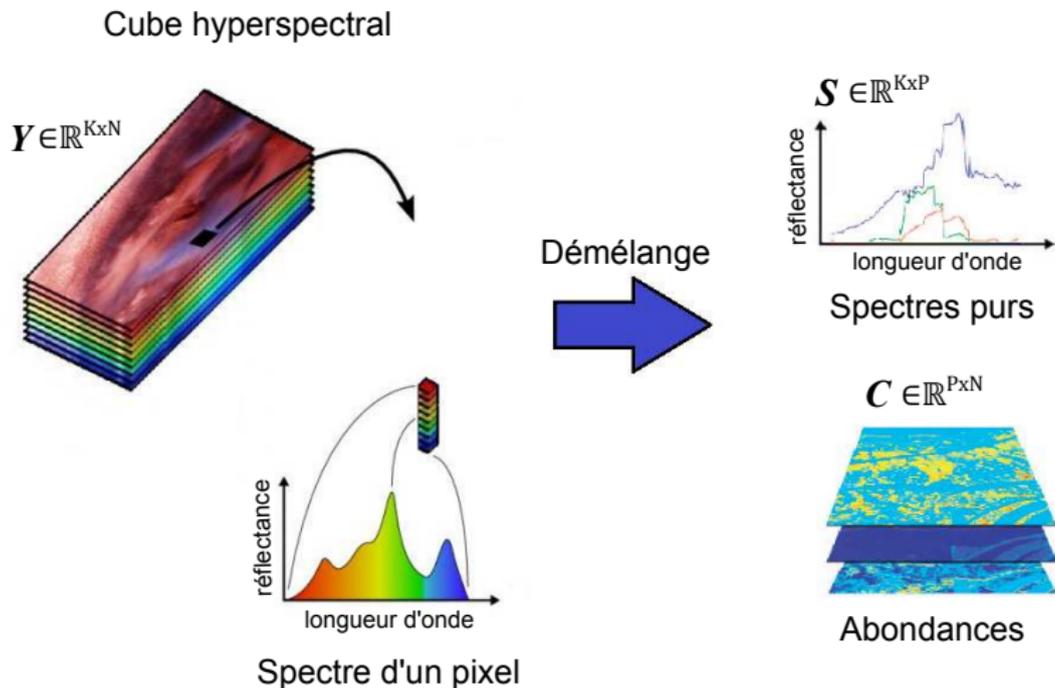
- Intégration de la contrainte d'égalité
- Algorithme de points intérieurs primal-dual

3 Résultats expérimentaux

- Temps de calcul dans le cas non pénalisé
- Intégration d'une pénalisation spatiale

4 Conclusion

Principe de l'imagerie hyperspectrale



N : Nombre de pixels ; K : Taille des spectres ; P : Nombre de constituants

Problème de reconstruction

► Modèle de mélange linéaire

$$\mathbf{Y} = \mathbf{S}\mathbf{C} + \mathbf{E}$$

- $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{K \times N}$: Observations
- $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{K \times P}$: Signatures spectrales
- $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{P \times N}$: Coefficients d'abondance
- $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{K \times N}$: Bruit supposé blanc gaussien i.i.d

► Estimation de \mathbf{C} à partir de \mathbf{Y} et \mathbf{S} .

① Contraintes de **positivité**

$$c_{p,n} \geq 0, \quad \forall p \in \{1, \dots, P\}, \quad \forall n \in \{1, \dots, N\}$$

② Contraintes d'**additivité**

$$\sum_{p=1}^P c_{p,n} = 1, \quad \forall n \in \{1, \dots, N\}$$

1 Introduction

2 Approche proposée

- Intégration de la contrainte d'égalité
- Algorithme de points intérieurs primal-dual

3 Résultats expérimentaux

- Temps de calcul dans le cas non pénalisé
- Intégration d'une pénalisation spatiale

4 Conclusion

- Reconstruction par minimisation contrainte d'un critère $F(\mathbf{C})$

Méthodes existantes :

$$\min_{\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{P \times N}} \left(F(\mathbf{C}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{S}\mathbf{C} - \mathbf{Y}\|_F^2 \right) \quad \text{s.c.} \quad \textcircled{1} \text{ et/ou } \textcircled{2}$$

- ① NNLS (*non-negative least squares*) [Lawson 1974]
- ② SCLS (*sum-to-one constrained least squares*) [Settle 1993]
- ① et ② FCLS (*fully constrained least squares*) [Heinz 2002]

- Minimisation rapide de $F(\mathbf{C})$ **strictement convexe quelconque** sous les contraintes ① et ②

- Intégration de la contrainte ② par **changement de variable**
- Résolution du problème d'optimisation contraint par une approche itérative de type **points intérieurs**

Intégration de la contrainte d'égalité

Propriété

- Soit $\mathbf{C}^{(1)}$ tel que, pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$, $\sum_{p=1}^P c_{p,n}^{(1)} = 1$.
- Soit $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{P \times P-1}$ telle que $\mathbf{Z}^T \mathbf{1} = \mathbf{0}$.

Alors, pour tout $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{P-1 \times N}$, $\mathbf{C} = \mathbf{C}^{(1)} + \mathbf{Z}\mathbf{U}$ vérifie la contrainte d'additivité ②.

► Réécriture du problème sous la forme

$$\min_{\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{P-1 \times N}} F(\mathbf{C}^{(1)} + \mathbf{Z}\mathbf{U}) \quad \text{s.c.} \quad \mathbf{C}^{(1)} + \mathbf{Z}\mathbf{U} \geq \mathbf{0},$$

ou, de façon équivalente,

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{NP-N}} L(\mathbf{u}), \quad \text{s.c.} \quad \mathbf{T}\mathbf{u} + \mathbf{t} \geq \mathbf{0}$$

en posant $\mathbf{u} = \text{vect}(\mathbf{U})$, $\mathbf{t} = \text{vect}(\mathbf{C}^{(1)})$ et $\mathbf{T} = \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{Z}$.

Algorithme de points intérieurs primal-dual : principe

- La solution \mathbf{u} et les multiplicateurs de Lagrange associés $\boldsymbol{\lambda}$ sont caractérisés par les conditions de Karush-Kuhn-Tucker

$$\begin{cases} \nabla L(\mathbf{u}) - \mathbf{T}^t \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{T}\mathbf{u} + \mathbf{t}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{T}\mathbf{u} + \mathbf{t} \geq \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0} \end{cases} \quad (\mathcal{P}_0)$$

en notant $\boldsymbol{\Lambda} = \text{Diag}(\boldsymbol{\lambda})$

Algorithme de points intérieurs primal-dual : principe

► **Approche primale-duale** : estimation de $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ en résolvant des versions **perturbées** des conditions KKT

$$\begin{cases} \nabla L(\mathbf{u}) - \mathbf{T}^t \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{T}\mathbf{u} + \mathbf{t}) = \mu_k \mathbf{1} \\ \mathbf{T}\mathbf{u} + \mathbf{t} \geq \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0} \end{cases} \quad (\mathcal{P}_k)$$

paramétrées par une suite de paramètres positifs $(\mu_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$.

Algorithme de points intérieurs primal-dual : principe

► **Approche primale-duale** : estimation de $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ en résolvant des versions **perturbées** des conditions KKT

$$\begin{cases} \nabla L(\mathbf{u}) - \mathbf{T}^t \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{T}\mathbf{u} + \mathbf{t}) = \mu_k \mathbf{1} \\ \mathbf{T}\mathbf{u} + \mathbf{t} \geq \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0} \end{cases} \quad (\mathcal{P}_k)$$

paramétrées par une suite de paramètres positifs $(\mu_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$.

► Une itération k de l'algorithme se décompose en deux étapes :

- 1 Calcul de $(\mathbf{u}_{k+1}, \boldsymbol{\lambda}_{k+1})$ en fonction de $(\mathbf{u}_k, \boldsymbol{\lambda}_k)$ en résolvant (\mathcal{P}_k) de façon approchée.
- 2 Calcul de μ_{k+1} selon une règle de mise à jour permettant de garantir la convergence de l'algorithme.

Algorithme de points intérieurs primal-dual : mise en œuvre

- 1 Méthode de Newton $(\mathbf{u}_{k+1}, \boldsymbol{\lambda}_{k+1}) = (\mathbf{u}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k^u, \boldsymbol{\lambda}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k^\lambda)$

Algorithme de points intérieurs primal-dual : mise en œuvre

- 1 Méthode de Newton $(\mathbf{u}_{k+1}, \boldsymbol{\lambda}_{k+1}) = (\mathbf{u}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k^u, \boldsymbol{\lambda}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k^\lambda)$
- Les directions de Newton primales et duales $(\mathbf{d}_k^u, \mathbf{d}_k^\lambda)$ sont calculées en résolvant

$$\begin{pmatrix} \nabla^2 L(\mathbf{u}_k) & -\mathbf{T}^t \\ \boldsymbol{\Lambda}_k \mathbf{T} & \text{Diag}(\mathbf{T}\mathbf{u}_k + \mathbf{t}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_k^u \\ \mathbf{d}_k^\lambda \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla L(\mathbf{u}_k) - \mathbf{T}^t \boldsymbol{\lambda}_k \\ \boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{T}\mathbf{u}_k + \mathbf{t}) - \boldsymbol{\mu}_k \end{pmatrix},$$

Algorithme de points intérieurs primal-dual : mise en œuvre

- 1 Méthode de Newton $(\mathbf{u}_{k+1}, \boldsymbol{\lambda}_{k+1}) = (\mathbf{u}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k^u, \boldsymbol{\lambda}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k^\lambda)$
- Les directions de Newton primales et duales $(\mathbf{d}_k^u, \mathbf{d}_k^\lambda)$ sont calculées en résolvant

$$\begin{pmatrix} \nabla^2 L(\mathbf{u}_k) & -\mathbf{T}^t \\ \boldsymbol{\Lambda}_k \mathbf{T} & \text{Diag}(\mathbf{T}\mathbf{u}_k + \mathbf{t}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_k^u \\ \mathbf{d}_k^\lambda \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla L(\mathbf{u}_k) - \mathbf{T}^t \boldsymbol{\lambda}_k \\ \boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{T}\mathbf{u}_k + \mathbf{t}) - \boldsymbol{\mu}_k \end{pmatrix},$$

- Le pas α_k est déterminé par une stratégie d'Armijo appliquée à la fonction de mérite primale-duale $\phi_{\mu_k}(\mathbf{u}_k + \alpha \mathbf{d}_k^u, \boldsymbol{\lambda}_k + \alpha \mathbf{d}_k^\lambda)$

$$\phi_{\mu}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = L(\mathbf{u}) - \mu \sum_{i=1}^{NP} \ln([\mathbf{T}\mathbf{u} + \mathbf{t}]_i) + \boldsymbol{\lambda}^t (\mathbf{T}\mathbf{u} + \mathbf{t}) - \mu \sum_{i=1}^{NP} \ln(\lambda_i [\mathbf{T}\mathbf{u} + \mathbf{t}]_i)$$

Algorithme de points intérieurs primal-dual : mise en œuvre

- 1 Méthode de Newton $(\mathbf{u}_{k+1}, \boldsymbol{\lambda}_{k+1}) = (\mathbf{u}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k^u, \boldsymbol{\lambda}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k^\lambda)$
- Les directions de Newton primales et duales $(\mathbf{d}_k^u, \mathbf{d}_k^\lambda)$ sont calculées en résolvant

$$\begin{pmatrix} \nabla^2 L(\mathbf{u}_k) & -\mathbf{T}^t \\ \boldsymbol{\Lambda}_k \mathbf{T} & \text{Diag}(\mathbf{T}\mathbf{u}_k + \mathbf{t}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_k^u \\ \mathbf{d}_k^\lambda \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla L(\mathbf{u}_k) - \mathbf{T}^t \boldsymbol{\lambda}_k \\ \boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{T}\mathbf{u}_k + \mathbf{t}) - \boldsymbol{\mu}_k \end{pmatrix},$$

- Le pas α_k est déterminé par une stratégie d'Armijo appliquée à la fonction de mérite primale-duale $\phi_{\mu_k}(\mathbf{u}_k + \alpha \mathbf{d}_k^u, \boldsymbol{\lambda}_k + \alpha \mathbf{d}_k^\lambda)$

$$\phi_{\mu}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = L(\mathbf{u}) - \mu \sum_{i=1}^{NP} \ln([\mathbf{T}\mathbf{u} + \mathbf{t}]_i) + \boldsymbol{\lambda}^t (\mathbf{T}\mathbf{u} + \mathbf{t}) - \mu \sum_{i=1}^{NP} \ln(\lambda_i [\mathbf{T}\mathbf{u} + \mathbf{t}]_i)$$

- 2 Mise à jour μ_{k+1} par la règle de μ -criticité, en fonction de la valeur du saut de dualité et du résidu [Armand 2000].

1 Introduction

2 Approche proposée

- Intégration de la contrainte d'égalité
- Algorithme de points intérieurs primal-dual

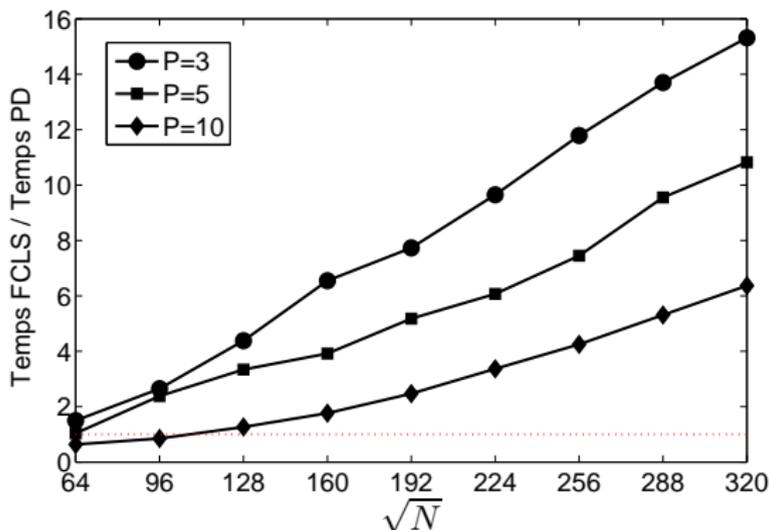
3 Résultats expérimentaux

- Temps de calcul dans le cas non pénalisé
- Intégration d'une pénalisation spatiale

4 Conclusion

Temps de calcul dans le cas non pénalisé

- Génération de cubes hyperspectraux synthétiques de N pixels dans $K = \sqrt{N}$ bandes de fréquences (RSB = 15 dB)
- Reconstruction par minimisation contrainte des moindres carrés



Comparaison entre les **temps de calcul** des algorithmes *FCLS* et *primal-dual (PD)* en fonction de la taille du problème

Intégration d'une pénalisation spatiale

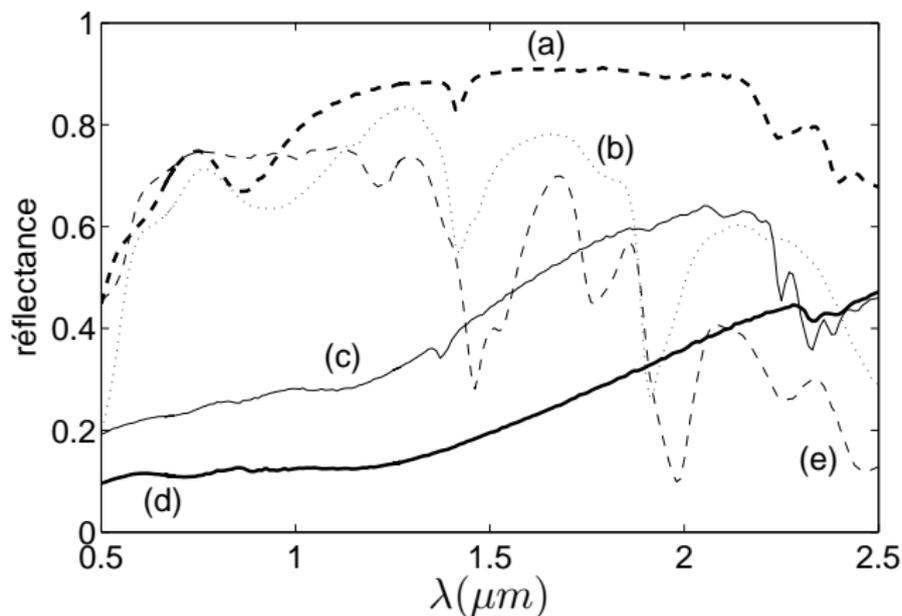
- ▶ Minimisation du critère des moindres carrés pénalisé

$$F(\mathbf{C}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{Y} - \mathbf{S}\mathbf{C}\|_F^2 + \eta \sum_{p=1}^P (\psi(\Delta^V \mathbf{c}_p) + \psi(\Delta^H \mathbf{c}_p))$$

sous les contraintes ① et ②

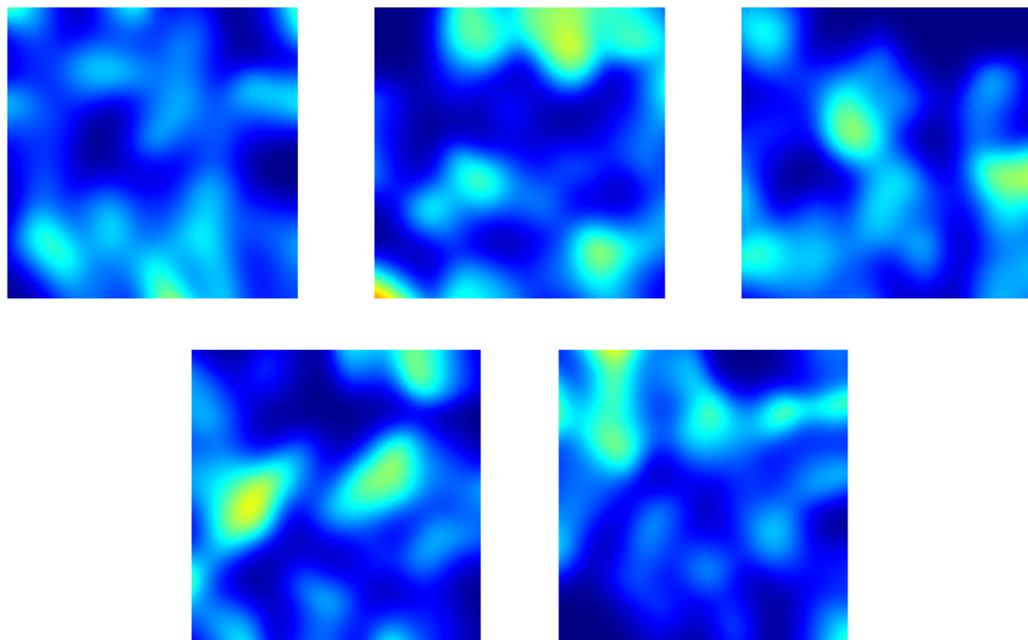
- Δ^V et Δ^H : Opérateurs de gradient spatial vertical et horizontal
- ψ : Fonction de pondération quadratique favorisant l'apparition de zones lisses dans les cartes.
- ▶ Génération des données expérimentales : $\mathbf{Y} = \mathbf{S}\mathbf{C} + \mathbf{E}$ avec
 - \mathbf{C} : Cube hyperspectral d'images de taille $N = 256 \times 256$ pixels.
 - \mathbf{S} : $P = 5$ spectres de taille $K = 224$ (AVIRIS), supposés connus ou estimés par NFINDR [Winter 1999].
 - \mathbf{E} : bruit blanc gaussien i.i.d

Signatures spectrales



*Signatures spectrales sélectionnées dans la bibliothèque AVIRIS.
(a) Andradite. (b) Erionite. (c) Chlorite. (d) Biotite. (e) Carnallite.*

Cartes simulées



Cartes simulées de taille $N = 256 \times 256$ pixels générées aléatoirement et normalisées pour satisfaire la contrainte ②

Résultats expérimentaux

RSB (dB)	NFINDR-PD	NFINDR-PD-P
20	$1,3 \cdot 10^{-1} / 2,7 \text{ s}$	$1,2 \cdot 10^{-1} / 160 \text{ s}$
15	$1,4 \cdot 10^{-1} / 2,5 \text{ s}$	$1,2 \cdot 10^{-1} / 167 \text{ s}$
10	$1,9 \cdot 10^{-1} / 3 \text{ s}$	$1,5 \cdot 10^{-1} / 181 \text{ s}$
5	$2,4 \cdot 10^{-1} / 3,4 \text{ s}$	$1,9 \cdot 10^{-1} / 180 \text{ s}$
RSB (dB)	LIB-PD	LIB-PD-P
20	$2,5 \cdot 10^{-2} / 2,8 \text{ s}$	$2,5 \cdot 10^{-2} / 160 \text{ s}$
15	$7,1 \cdot 10^{-2} / 2,8 \text{ s}$	$2,5 \cdot 10^{-2} / 170 \text{ s}$
10	$1,7 \cdot 10^{-1} / 3 \text{ s}$	$2,4 \cdot 10^{-2} / 191 \text{ s}$
5	$3,6 \cdot 10^{-1} / 3,5 \text{ s}$	$2,5 \cdot 10^{-2} / 231 \text{ s}$

Résultats d'estimation et temps de calcul (EQMn/Temps)

↪ dans le cas de spectres estimés par NFINDR

↪ dans le cas de spectres issus de la bibliothèque

Résultats expérimentaux

RSB (dB)	NFINDR-PD	NFINDR-PD-P
20	$1,3 \cdot 10^{-1}$ / 2,7 s	$1,2 \cdot 10^{-1}$ / 160 s
15	$1,4 \cdot 10^{-1}$ / 2,5 s	$1,2 \cdot 10^{-1}$ / 167 s
10	$1,9 \cdot 10^{-1}$ / 3 s	$1,5 \cdot 10^{-1}$ / 181 s
5	$2,4 \cdot 10^{-1}$ / 3,4 s	$1,9 \cdot 10^{-1}$ / 180 s
RSB (dB)	LIB-PD	LIB-PD-P
20	$2,5 \cdot 10^{-2}$ / 2,8 s	$2,5 \cdot 10^{-2}$ / 160 s
15	$7,1 \cdot 10^{-2}$ / 2,8 s	$2,5 \cdot 10^{-2}$ / 170 s
10	$1,7 \cdot 10^{-1}$ / 3 s	$2,4 \cdot 10^{-2}$ / 191 s
5	$3,6 \cdot 10^{-1}$ / 3,5 s	$2,5 \cdot 10^{-2}$ / 231 s

Résultats d'estimation et temps de calcul (EQMn/Temps)

↪ dans le cas de spectres estimés par NFINDR

↪ dans le cas de spectres issus de la bibliothèque

Résultats expérimentaux

RSB (dB)	NFINDR-PD	NFINDR-PD-P
20	$1,3 \cdot 10^{-1} / 2,7 \text{ s}$	$1,2 \cdot 10^{-1} / 160 \text{ s}$
15	$1,4 \cdot 10^{-1} / 2,5 \text{ s}$	$1,2 \cdot 10^{-1} / 167 \text{ s}$
10	$1,9 \cdot 10^{-1} / 3 \text{ s}$	$1,5 \cdot 10^{-1} / 181 \text{ s}$
5	$2,4 \cdot 10^{-1} / 3,4 \text{ s}$	$1,9 \cdot 10^{-1} / 180 \text{ s}$
RSB (dB)	LIB-PD	LIB-PD-P
20	$2,5 \cdot 10^{-2} / 2,8 \text{ s}$	$2,5 \cdot 10^{-2} / 160 \text{ s}$
15	$7,1 \cdot 10^{-2} / 2,8 \text{ s}$	$2,5 \cdot 10^{-2} / 170 \text{ s}$
10	$1,7 \cdot 10^{-1} / 3 \text{ s}$	$2,4 \cdot 10^{-2} / 191 \text{ s}$
5	$3,6 \cdot 10^{-1} / 3,5 \text{ s}$	$2,5 \cdot 10^{-2} / 231 \text{ s}$

Résultats d'estimation et temps de calcul (EQMn/Temps)

↪ dans le cas de spectres estimés par NFINDR

↪ dans le cas de spectres issus de la bibliothèque

Résultats expérimentaux

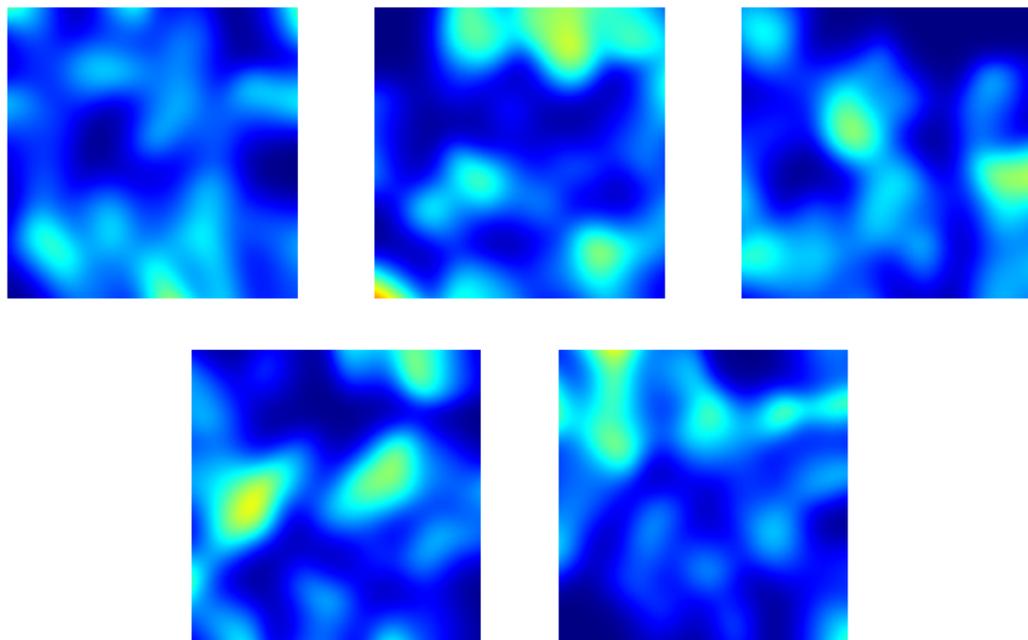
RSB (dB)	NFINDR-PD	NFINDR-PD-P
20	$1,3 \cdot 10^{-1}$ / 2,7 s	$1,2 \cdot 10^{-1}$ / 160 s
15	$1,4 \cdot 10^{-1}$ / 2,5 s	$1,2 \cdot 10^{-1}$ / 167 s
10	$1,9 \cdot 10^{-1}$ / 3 s	$1,5 \cdot 10^{-1}$ / 181 s
5	$2,4 \cdot 10^{-1}$ / 3,4 s	$1,9 \cdot 10^{-1}$ / 180 s
RSB (dB)	LIB-PD	LIB-PD-P
20	$2,5 \cdot 10^{-2}$ / 2,8 s	$2,5 \cdot 10^{-2}$ / 160 s
15	$7,1 \cdot 10^{-2}$ / 2,8 s	$2,5 \cdot 10^{-2}$ / 170 s
10	$1,7 \cdot 10^{-1}$ / 3 s	$2,4 \cdot 10^{-2}$ / 191 s
5	$3,6 \cdot 10^{-1}$ / 3,5 s	$2,5 \cdot 10^{-2}$ / 231 s

*Résultats d'estimation et temps de calcul (EQMn/**Temps**)*

↪ dans le cas de spectres estimés par NFINDR

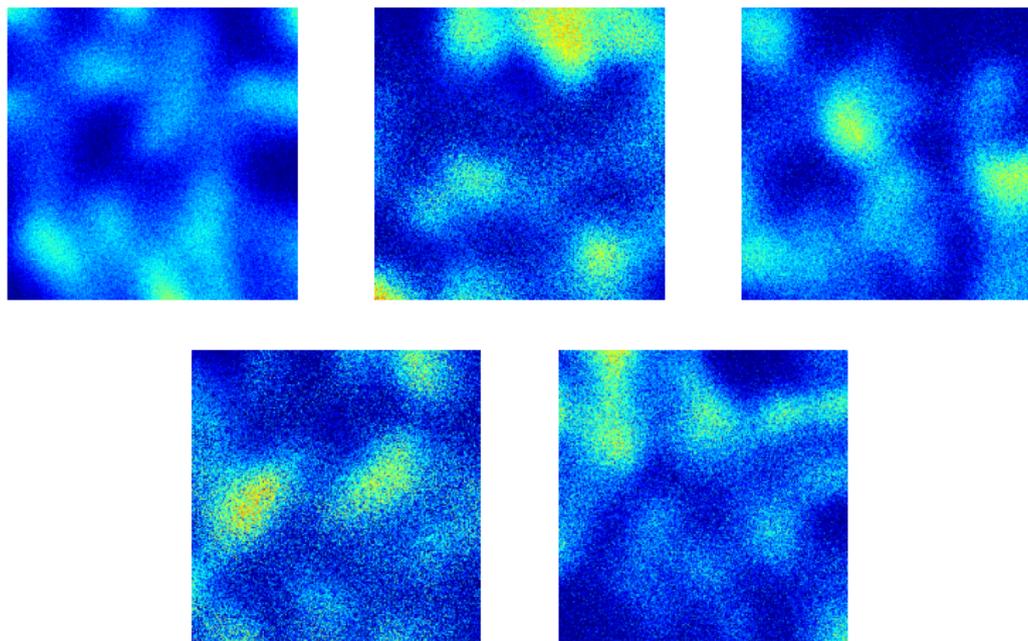
↪ dans le cas de spectres issus de la bibliothèque

Cartes simulées



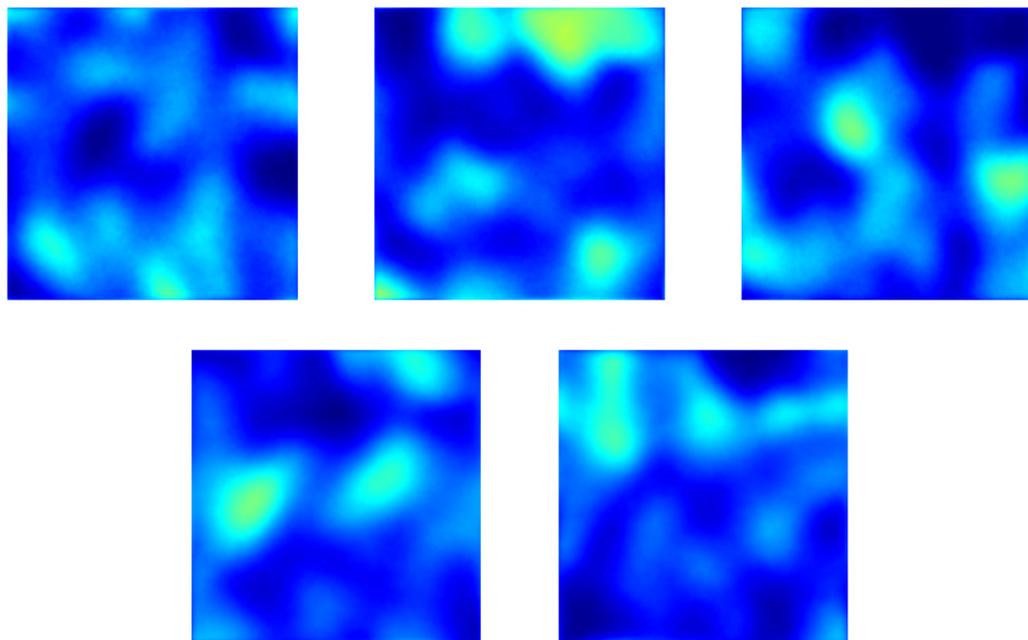
Cartes simulées de taille $N = 256 \times 256$ pixels générées aléatoirement et normalisées pour satisfaire la contrainte ②

Cartes estimées par moindres carrés



*Erreur de reconstruction moyenne : $1,7 \cdot 10^{-1}$
pour un niveau de bruit initial $RSB = 10$ dB*

Cartes estimées par moindres carrés pénalisés ($\eta = 100$)



*Erreur de reconstruction moyenne : $2,4 \cdot 10^{-2}$
pour un niveau de bruit initial $RSB = 10$ dB*

1 Introduction

2 Approche proposée

- Intégration de la contrainte d'égalité
- Algorithme de points intérieurs primal-dual

3 Résultats expérimentaux

- Temps de calcul dans le cas non pénalisé
- Intégration d'une pénalisation spatiale

4 Conclusion

Conclusion

▶ Algorithme primal-dual de points intérieurs pour l'estimation contrainte des cartes d'abondances

↪ Gain de temps important par rapport à FCLS, dans le cas non pénalisé

↪ Intégration simple d'une régularisation spatiale

↪ Possibilité de gérer :

- Une contrainte de somme inférieure ou égale à un
- Un modèle de bruit non gaussien
- Une pénalisation non quadratique

▶ Perspective envisagée : Accélération de la minimisation dans le cas d'une régularisation spatiale

↪ Inversion approchée du système linéaire primal-dual

↪ Remplacement de Newton par une méthode de premier ordre

Merci de votre attention !

Bibliographie



C.-I. Chang

Solving Hyperspectral Data Exploitation

Wiley Interscience, 2007



C. L. Lawson and R. J. Hanson

Solving Least-Squares Problems

Prentice-Hall, 1974



P. Armand, J. C. Gilbert and S. Jan-Jégou

A feasible BFGS interior point algorithm for solving strongly convex minimization problems

SIAM Journal on Optimization, 11 :199–222, 2000



N. Dobigeon, S. Moussaoui, M. Coulon, J. Tourneret and A. O. Hero

Algorithmes bayésiens pour le démixage supervisé, semi-supervisé et non-supervisé d'images hyperspectrales

Traitement du signal, 27(1) :79–108, 2010



D. C. Heinz and C.-I. Chang

Fully constrained least squares linear spectral mixture analysis method for material quantification in hyperspectral imagery

IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 39(3) :529–545, 2001

Bibliographie

 N. Keshava and J. F. Mustard
Spectral unmixing
IEEE Signal Processing Magazine, 19(1) :44–57, 2002

 N. Keshava
A survey of spectral unmixing
Lincoln Laboratory Journal, 14(1) :55–78, 2003

 M. Parente and A. Plaza
Survey of geometric and statistical unmixing algorithms for hyperspectral images
In Proc. of the 2nd Workshop on Hyperspectral Image and Signal Processing : Evolution in Remote Sensing (WHISPERS), 2010

 J. J. Settle and N. A. Drake
Linear mixing and the estimation of ground cover proportions
International Journal of Remote Sensing, 14(6) :1159–1177, 1993

 M. E. Winter
N-FINDR : an algorithm for fast autonomous spectral endmember determination in hyperspectral data
In Proc. of SPIE- Image Spectrometry V, 3753 :266–277, 1999