

Algorithme primal-dual de points intérieurs pour l'estimation pénalisée des cartes d'abondances en imagerie hyperspectrale

Emilie CHOUZENOUX¹, Saïd MOUSSAOUI², Jérôme IDIER²

¹LIGM, CNRS UMR 8049, 5, Boulevard Descartes, Champs sur Marne, 77454 Marne La Vallée Cedex 2, France
emilie.chouzenoux@univ-mlv.fr

²IRCCYN, CNRS UMR 6597, 1, rue de la Noë, BP 92101, F-44321 Nantes Cedex 03, France
prenom.nom@irccyn.ec-nantes.fr

Thème – SS1. Analyse d'images hyperspectrales

Problème traité – Nous nous intéressons au problème d'estimation des cartes d'abondances en imagerie hyperspectrale par la minimisation d'un critère qui prend en compte la régularité spatiale des coefficients d'abondances.

Originalité – Nous adoptons une approche d'estimation fondée sur la minimisation d'un critère pénalisé. Afin de résoudre le problème d'optimisation de ce critère sous les contraintes de positivité et d'additivité (somme à un), un algorithme rapide de points intérieurs est employé.

Résultats – Les performances sont évaluées sur des données synthétiques. La comparaison avec la méthode de référence (FCLS, pour *Fully constrained least squares*) montre que notre approche est très avantageuse en terme de coût de calcul pour des images de grande dimension. De plus, l'intégration de la pénalisation permet d'améliorer la qualité de la reconstruction.

1 Introduction

L'imagerie hyperspectrale est une technique de mesure qui permet d'accéder à des informations liées à la composition d'une surface, en exploitant ses propriétés de réflexion (ou d'absorption) de la lumière dans plusieurs bandes de fréquences. Comme chaque pixel d'une image hyperspectrale correspond à une surface composée de plusieurs constituants, qui sont caractérisés différemment dans le domaine spectral, l'analyse de toutes les images permet d'identifier ces constituants et de déterminer leurs proportions.

Modèle de mélange. Le modèle le plus couramment utilisé suppose que le spectre de réflectance dans chaque pixel de l'image est la combinaison linéaire d'un nombre fini de spectres purs des constituants, appelés aussi pôles de mélange, pondérée par des coefficients, appelés abondances, qui sont liés à la proportion de chaque constituant dans ce pixel. Plus précisément, considérons N pixels d'une image hyperspectrale acquise dans K bandes spectrales. Selon le modèle de mélange linéaire, le spectre $\mathbf{y}_n = [y_{n,1}, \dots, y_{n,K}]^T$ du $n^{\text{ème}}$ pixel s'exprime comme la combinaison linéaire de P signatures spectrales \mathbf{s}_p entachée d'un bruit additif ϵ_p , qui sera supposé gaussien i.i.d et de moyenne nulle et variance inconnue :

$$\mathbf{y}_n = \sum_{p=1}^P \mathbf{s}_p c_{n,p} + \epsilon_n, \quad (1)$$

où $\mathbf{s}_p = [s_{p,1}, \dots, s_{p,K}]^T$ est le spectre du $p^{\text{ème}}$ constituant, $c_{n,p}$ est le coefficient d'abondance du $p^{\text{ème}}$ constituant dans le $n^{\text{ème}}$ pixel et P est le nombre de constituants recherchés. Si l'on considère tous les pixels de l'image hyperspectrale, le système d'équations (1) s'écrit sous forme matricielle $\mathbf{Y} = \mathbf{S}\mathbf{C} + \mathbf{E}$, avec $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{K \times N}$ les observations associées aux pixels de l'image, $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{K \times P}$ les signatures spectrales, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{P \times N}$ les coefficients d'abondances et $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{K \times N}$ les bruits associés aux observations. L'objectif du traitement est donc d'estimer \mathbf{S} et \mathbf{C} à partir de \mathbf{Y} , en utilisant le modèle (1).

Méthodes d'analyse. Afin de résoudre ce problème, plusieurs stratégies peuvent être adoptées [1]. Celles-ci se déclinent en deux grandes familles : les méthodes d'estimation séquentielle et les méthodes d'estimation conjointe. Dans la première approche, une procédure d'extraction des pôles du mélange est d'abord employée pour estimer les spectres des constituants des images avant

d'appliquer un algorithme d'estimation des abondances. La deuxième approche se fonde sur une estimation conjointe des spectres purs et des abondances. Dans le cadre de ce travail, nous considérons que les spectres purs ont été préalablement obtenus et nous nous intéressons au développement d'une méthode d'estimation rapide des cartes d'abondances de grande dimension.

Contraintes. Les coefficients d'abondances étant reliés aux proportions des constituants de la surface, les vecteurs d'abondances $\mathbf{c}_n = [c_{n,1}, \dots, c_{n,P}]^T$ dans (1) doivent vérifier les contraintes de positivité et d'additivité suivantes :

$$c_{n,p} \geq 0, \quad \forall p = 1, \dots, P, \quad (2a)$$

$$\sum_{p=1}^P c_{n,p} = 1. \quad (2b)$$

Les algorithmes de démixage linéaire sont basés sur la minimisation du critère de moindres carrés $J(\mathbf{C})^{\text{MC}} = \frac{1}{2} \|\mathbf{Y} - \mathbf{S}\mathbf{C}\|_F^2$, où $\|\cdot\|_F$ représente la norme de Frobenius, sous la contrainte (2a) (NNLS [2], non-negative least squares) ou (2b) (SCLS [3], sum-to-one constrained least squares) ou encore sous les deux contraintes (2a) et (2b) (FCLS [4], pour fully constrained least squares). Nous proposons dans cet article un algorithme de démixage linéaire intégrant une information de régularité de la répartition spatiale des coefficients d'abondance en plus des contraintes de positivité et d'additivité.

2 Méthode d'estimation des cartes d'abondances

Nous adoptons une approche pénalisée pour résoudre le problème d'estimation de \mathbf{C} . Les contraintes de positivité et d'additivité sont prises en compte à travers l'utilisation d'un algorithme d'optimisation de type point intérieurs.

Pénalisation de la distribution spatiale des coefficients d'abondance. La pénalisation est choisie de manière à assurer une régularité de la distribution spatiale des coefficients d'abondances. L'estimation des cartes d'abondances se ramène donc à résoudre le problème suivant :

$$\min_{\mathbf{C}} (F(\mathbf{C}) = J(\mathbf{C}) + \eta R(\mathbf{C})), \quad \text{sous les contraintes (2a) et (2b)}, \quad (3)$$

où J est un terme convexe mesurant l'adéquation entre les données \mathbf{Y} et le modèle $\mathbf{S}\mathbf{C}$, par exemple $J = J^{\text{MC}}$, et R est un terme convexe de régularisation renforçant la régularité spatiale des cartes d'abondances $\mathbf{c}_p = [c_{1,p}, \dots, c_{N,p}]$:

$$R(\mathbf{C}) = \sum_{p=1}^P \left(\psi(\Delta^V \mathbf{c}_p) + \psi(\Delta^H \mathbf{c}_p) \right), \quad (4)$$

avec Δ^V et Δ^H respectivement les opérateurs de gradient spatial vertical et horizontal, et ψ une fonction de pondération convexe quadratique (ℓ_2) ou semi-quadratique ($\ell_1 - \ell_2$) favorisant l'apparition de zones lisses dans \mathbf{c}_p .

Transformation des contraintes (2a) (2b) en contraintes d'inégalités linéaires. Comme proposé dans [5], remarquons que pour tout vecteur initial $\mathbf{c}_n^{(1)}$ vérifiant la contrainte (2b), le vecteur défini par $\mathbf{c}_n = \mathbf{c}_n^{(1)} + \mathbf{Z}\mathbf{u}_n$, avec $\mathbf{u}_n \in \mathbb{R}^{P-1}$, va aussi respecter cette contrainte d'additivité si $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{P \times P-1}$ est la matrice dont les colonnes forment l'espace nul de $\mathbf{1}_{P \times 1}$. Cette matrice étant donnée par

$$Z_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{si } i = 1, \\ 1 & \text{si } i = j + 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

le problème (3) se réécrit sous la forme d'un problème d'optimisation sous les contraintes d'inégalités uniquement,

$$\min_{\mathbf{U}} F(\mathbf{C}^{(1)} + \mathbf{Z}\mathbf{U}), \quad \text{sous les contraintes } \mathbf{Z}\mathbf{u}_n + \mathbf{c}_n^{(1)} \geq 0, \quad \forall n = 1, \dots, N. \quad (5)$$

Résolution du problème d'optimisation sous contraintes. La résolution du problème d'optimisation contraint (5) est effectuée par un algorithme de points intérieurs primal-dual. Une réorganisation lexicographique permet d'écrire (5) sous la forme standard $\min_{\mathbf{u}} L(\mathbf{u})$ sous des contraintes linéaires $\mathbf{T}\mathbf{u} + \mathbf{t} \geq 0$, où $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{NP \times NP-N}$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{NP-N}$ et $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^{NP}$. L'approche primale-duale consiste à estimer de façon jointe les variables auxiliaires \mathbf{u} et les multiplicateurs de Lagrange associés $\boldsymbol{\lambda}$. Le problème initial est remplacé par une séquence de systèmes linéaires à résoudre, correspondant à une version perturbée des conditions de Karush-Kuhn-Tucker,

$$\begin{cases} \nabla L(\mathbf{u}) - \mathbf{T}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \\ \lambda_i [\mathbf{T}\mathbf{u} + \mathbf{t}]_i - \mu = 0, \quad i = 1, \dots, NP \end{cases} \quad \text{sous les contraintes } \mathbf{T}\mathbf{u} + \mathbf{t} \geq 0, \quad \boldsymbol{\lambda} \geq 0, \quad (6)$$

pour une suite de paramètres positifs μ convergeant vers 0.

Mise en œuvre. Nous proposons d'utiliser l'algorithme primal-dual NOPTIQ [5] en insérant la méthode de Newton pour résoudre le système primal-dual. Pour chaque valeur de μ , $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ est obtenu en résolvant (6) de façon approchée : tout d'abord, les directions de Newton primales et duales $(\mathbf{d}_u, \mathbf{d}_\lambda)$ sont calculées. Puis, une recherche de pas, basée sur la minimisation d'une fonction de mérite primale-duale,

$$\phi_\mu(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = L(\mathbf{u}) - \mu \sum_{i=1}^{NP} \log([\mathbf{T}\mathbf{u} + \mathbf{t}]_i) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{u} - \mu \sum_{i=1}^{NP} \log(\lambda_i [\mathbf{T}\mathbf{u} + \mathbf{t}]_i), \quad (7)$$

est effectuée le long de ces directions. Enfin, la convergence de l'algorithme est contrôlée à travers la règle de mise à jour de μ .

3 Résultats

Afin d'analyser les performances de la méthode proposée, nous considérons un exemple synthétique d'un cube hyperspectral d'images de tailles $N = 256 \times 256$ pixels obtenues dans $K = 256$ bandes de fréquences. Le nombre de constituants est pris égal à $P = 3$ et un bruit gaussien i.i.d de moyenne nulle et de variance adéquate est ajoutée pour obtenir un rapport signal sur bruit de 5dB au niveau de chaque pixel de l'image.

Analyse des données. Afin de se placer dans un contexte réaliste, l'estimation des pôles du mélange est effectuée par l'algorithme NFINDR [6]. Nous présentons les résultats de l'estimation dans un cadre non pénalisé, correspondant à la minimisation du critère des moindres carrés sous les contraintes d'additivité et de positivité, par l'algorithme FCLS et le résultat de la résolution du problème (3) par l'algorithme primal-dual. La fonction de pondération ψ est quadratique et le paramètre de régularisation η est choisi égal à 200 afin de minimiser l'erreur de reconstruction. Nous présentons dans le tableau 1 les résultats obtenus en terme de temps de calcul et de qualité des cartes d'abondances estimées \hat{c}_p , au sens de l'erreur quadratique normalisée moyenne $\text{EQMm} = \frac{1}{P} \sum_{p=1}^P (\|c_p - \hat{c}_p\|_2^2 / \|c_p\|_2^2)$, par rapport aux cartes de référence c_p . D'autre part, nous indiquons pour différentes valeurs de la taille N de l'image, le temps nécessaire à l'optimisation par les algorithmes primal-dual et FCLS.

Discussion. Dans le cas non pénalisé, nous pouvons constater que l'algorithme primal-dual permet d'atteindre les mêmes performances en terme de qualité de reconstruction que l'algorithme FCLS, mais avec un temps de calcul très réduit, notamment pour des images de grande taille. De plus, l'intégration de l'*a priori* de régularité permet d'améliorer la qualité de la reconstruction.

	Non pénalisé ($\eta = 0$)		Pénalisé
	FCLS	Primal Dual	Primal Dual
EQMm	$2.5 \cdot 10^{-2}$	$2.5 \cdot 10^{-2}$	$2.1 \cdot 10^{-2}$
Temps	30.3 s	2.7 s	19.1 s

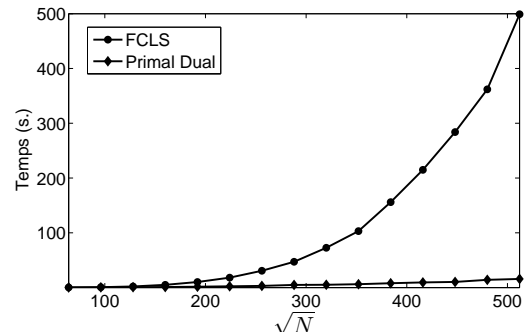


TABLE 1 – Comparaison des performances d'estimation par les différentes méthodes (gauche) et temps de reconstruction en fonction du nombre de pixels dans le cas non pénalisé (droite).

Références

- [1] N. Keshava et J. Mustard, « Spectral unmixing », *IEEE Signal Processing Mag.*, vol. 19, n°1, pp. 44–57, jan. 2002.
- [2] C. Lawson et R. Hanson, *Solving Least-Squares Problems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.
- [3] J. J. Settle et N. A. Drake, « Linear mixing and the estimation of ground cover proportions », vol. 14, n°6, pp. 1159–1177, 1993.
- [4] D. Heinz et C.-I. Chang, « Fully constrained least squares linear spectral mixture analysis method for material quantification in hyperspectral imagery », *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, vol. 39, n°3, pp. 529–545, mars 2001.
- [5] P. Armand, J. C. Gilbert et S. Jan-Jégou, « A feasible BFGS interior point algorithm for solving strongly convex minimization problems », *SIAM J. Optimization*, vol. 11, pp. 199–222, 2000.
- [6] M. E. Winter, « N-FINDR : an algorithm for fast autonomous spectral endmember determination in hyperspectral data », in *proc. of SPIE - Image Spectrometry V*, 1999, vol. 3753, pp. 266–277.