

RECONSTRUCTION D'UN SPECTRE RMN 2D PAR MAXIMUM D'ENTROPIE



Émilie CHOUZENOUX
emilie.chouzenoux@irccyn.ec-nantes.fr

Saïd MOUSSAOUI - Jérôme IDIER
(said.moussaoui, jerome.idier)@irccyn.ec-nantes.fr

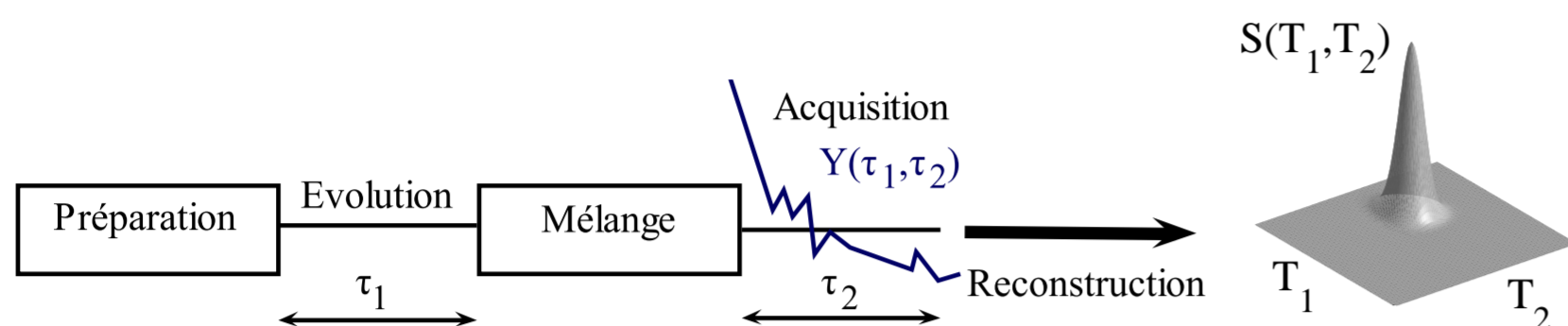
François MARIETTE
francois.mariette@cemagref.fr

GRETSI 2009



1. Position du problème

a. La résonance magnétique nucléaire 2D



Modèle d'observation :

$$Y(\tau_1, \tau_2) = \iint (1 - e^{-\tau_1/T_1}) \underbrace{S(T_1, T_2)}_{\text{à estimer}} e^{-\tau_2/T_2} dT_1 dT_2 + \underbrace{E(\tau_1, \tau_2)}_{\text{bruit}}$$

Forme discrétisée :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{K}_1 \mathbf{S} \mathbf{K}_2^t + \mathbf{E} \quad (1)$$

avec $\mathbf{K}_1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times N_1}$, $\mathbf{K}_2 \in \mathbb{R}^{m_2 \times N_2}$, $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_2}$ et $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_2}$, pour m_i valeurs de τ_i et une grille de N_i valeurs de T_i , $i = 1, 2$.

b. Le problème de reconstruction 2D

Estimation du spectre \mathbf{S} à partir des mesures en s'appuyant sur le modèle (1) sous la contrainte $\mathbf{S} \geq 0$ (au sens $S_{ij} \geq 0$).

Difficultés : Caractère mal-posé du problème, taille importante des données à traiter (e.g., $m_1 = 50$, $m_2 = 10^4$ et $N_i = 200$, $i = 1, 2$)

Minimisation d'un critère régularisé :

$$\min_{\mathbf{S} \geq 0} L(\mathbf{S}) = C(\mathbf{S}) + \lambda R(\mathbf{S})$$

Adéquation aux données :

$$C(\mathbf{S}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{Y} - \mathbf{K}_1 \mathbf{S} \mathbf{K}_2^t\|_F^2$$

Pénalisation par maximum d'entropie :

$$R(\mathbf{S}) = \sum_{T_1, T_2} S(T_1, T_2) \ln S(T_1, T_2)$$

Réécriture vectorielle du problème discret :

$$\mathbf{y} = \mathbf{K} \mathbf{s} + \mathbf{e} \Leftrightarrow \mathbf{Y} = \mathbf{K}_1 \mathbf{S} \mathbf{K}_2^t + \mathbf{E}$$

avec $\mathbf{y} = \text{vect}(\mathbf{Y})$, $\mathbf{s} = \text{vect}(\mathbf{S})$, $\mathbf{e} = \text{vect}(\mathbf{E})$ et $\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 \otimes \mathbf{K}_2$.

2. Méthode de Bryan et Skilling

Principe : [Skilling et al., 1984]

SB1

A chaque itération k ,

- 1) Génération d'un sous-espace \mathcal{D}_r de dimension r engendré par une famille de vecteurs $\{\mathbf{d}_k^{(1)} \dots \mathbf{d}_k^{(r)}\}$
- 2) Calcul des poids $\xi_k^{(j)}$ minimisant une approximation quadratique du critère $L(\mathbf{s})$ au point \mathbf{s}_k sur \mathcal{D}_r
- 3) Mise à jour : $\mathbf{s}_{k+1} = \mathbf{s}_k + \sum_{j=1}^r \xi_k^{(j)} \mathbf{d}_k^{(j)} = \mathbf{s}_k + \mathbf{D}_k \xi_k$
- 4) Contrainte de positivité : $\mathbf{s}_{k+1} = \max(\mathbf{s}_{k+1}, \epsilon)$, $0 < \epsilon \ll 1$

Propositions :

SB2

- Si $L(\mathbf{s}_{k+1}) > L(\mathbf{s}_k)$, relaxation $\mathbf{s}_{k+1} = \mathbf{s}_k + \alpha_k \mathbf{D}_k \xi_k$ pour assurer $\mathbf{s}_{k+1} > 0$ et $L(\mathbf{s}_{k+1}) < L(\mathbf{s}_k)$.
- Recherche de la dimension r pour optimiser la décroissance du critère L à chaque itération.

3. Méthode de gradient conjugué non linéaire

Principe :

A chaque itération k ,

- 1) Génération d'une direction de descente $\mathbf{d}_k = -\mathbf{g}_k + \beta_k \mathbf{d}_{k-1}$ et β_k coefficient de conjugaison
- 2) Calcul du pas α_k minimiseur approché de $\ell(\alpha) = L(\mathbf{s}_k + \alpha \mathbf{d}_k)$
- 3) Mise à jour : $\mathbf{s}_{k+1} = \mathbf{s}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k$

Propositions :

GCNLP

- Dérivée de $\ell(\alpha)$ infinie pour $\bar{\alpha}$ annulant $\mathbf{s}_k + \alpha \mathbf{d}_k \Rightarrow$ Recherche de α_k par un algorithme Majoration-Minimisation [Chouzenoux et al., Eusipco 2009]. L'approximation tangente majorante de $\ell(\alpha)$ proposée est de la forme $p_0 + p_1 \alpha + p_2 \alpha^2 - p_3 \log(\alpha - \bar{\alpha})$
- Préconditionnement $\mathbf{d}_k = -\mathbf{P}_k \mathbf{g}_k + \beta_k' \mathbf{d}_{k-1}$ par SVD tronquée de \mathbf{K}_1 et \mathbf{K}_2 .

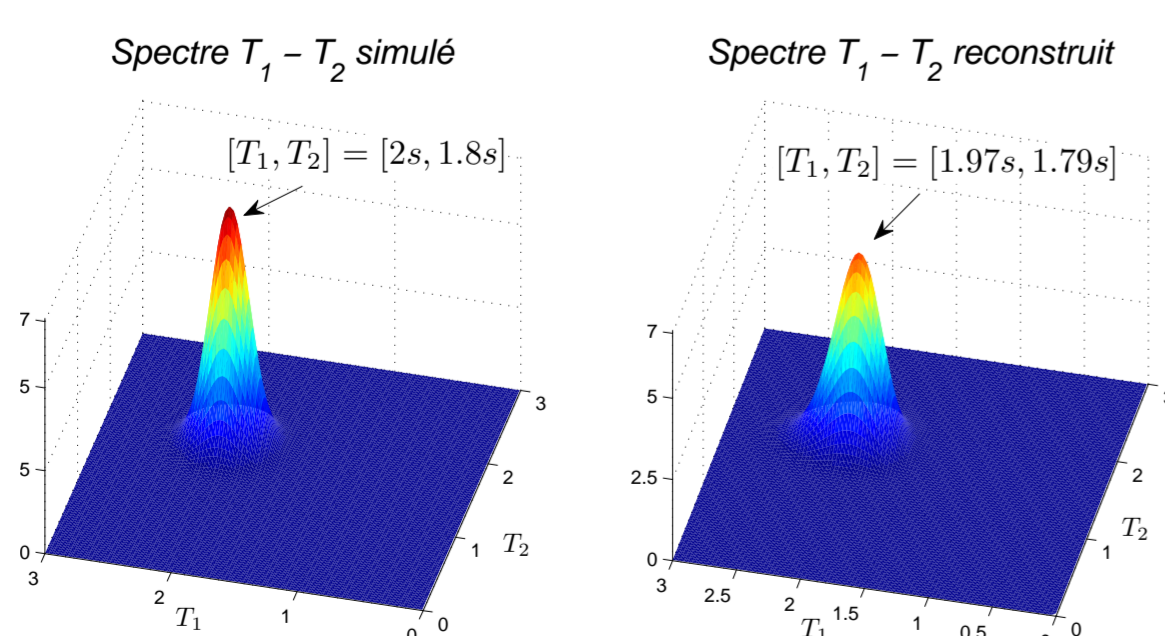
4. Résultats expérimentaux

a. Exemple synthétique

Dimension du problème :

$m_1 = 200$, $m_2 = 500$, $N_1 = N_2 = 100$

Niveau de bruit : $RSB = 40dB$



	SB1	SB2	GCNLP
Itérations	147	535	151
Temps(s)	10.2	90.9	28.3
$\ \mathbf{s} - \mathbf{s}^0\ _2 / \ \mathbf{s}^0\ _2$	0.21	0.199	0.179
$\ \nabla L(\mathbf{s})\ _\infty$	$1.79 \cdot 10^{-4}$	$1.81 \cdot 10^{-4}$	$7.93 \cdot 10^{-9}$

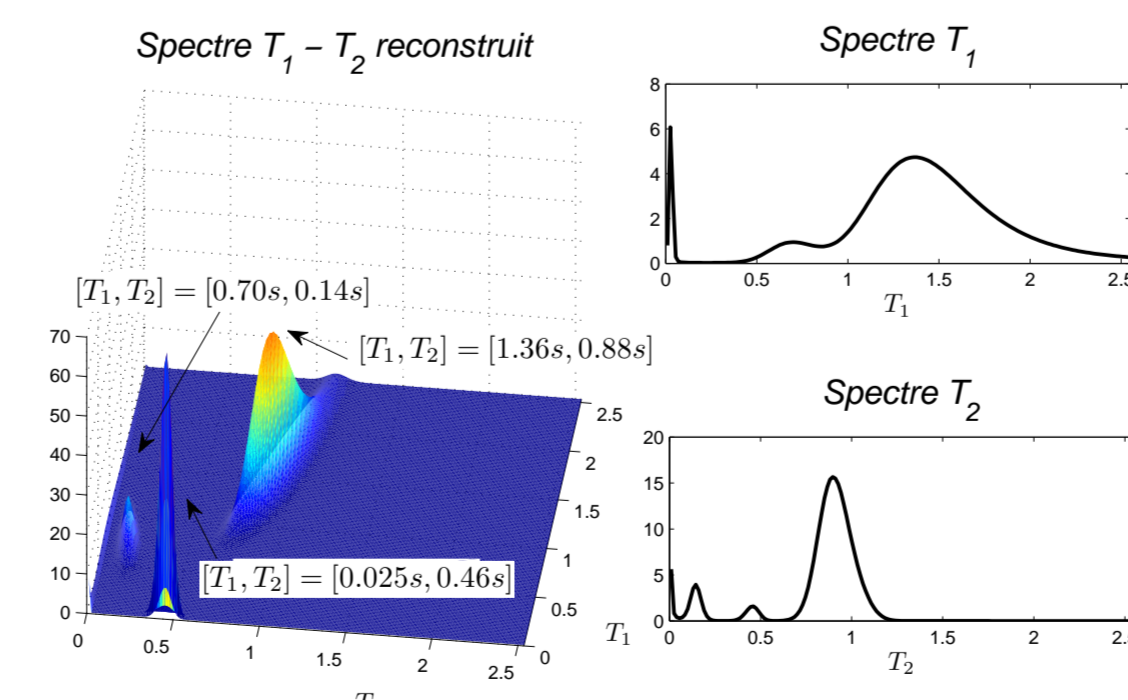
Reconstruction avec $\lambda = 10^{-6}$

b. Données expérimentales

Échantillon de pomme

Dimension du problème :

$m_1 = 50$, $m_2 = 10000$, $N_1 = N_2 = 200$



	SB1	SB2	GCNLP
Itérations	254	2910	94
Temps(s)	186.5	3578	68.9
$\ \nabla L(\mathbf{s})\ _\infty$	$2.57 \cdot 10^{-6}$	$4.69 \cdot 10^{-7}$	$9.44 \cdot 10^{-10}$

Reconstruction avec $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$

c. Analyse des résultats

- SB1 : Décroissance de L non assurée
- SB1 et SB2 : Convergence vers des points stationnaires (au sens du test d'arrêt) n'annulant pas le gradient : l'annulation du gradient nécessite un temps de calcul beaucoup plus grand.

PERSPECTIVES

- Définition d'une stratégie de réglage automatique du λ .
- Comparaison avec l'algorithme de [Song et al., 2002], méthode de référence en RMN.