Réunion GDR ISIS – Transformées Géométriques Multirésolution – 1er Avril 2011 - Paris

Transformées en ondelettes analytiques pour les images.

Raphaël Soulard, P. Carré, C. Fernandez
Laboratoire Xlim-SIC , Poitiers

PLAN

- Contexte : Ondelettes + Signal analytique
- Ondelettes quaternioniques ($\mathbb{H}$)
- QWT : Applications
- Ondelettes monogènes ($\mathcal{G}_3$)
- Ondelettes monogènes couleur
- Conclusion

Limites des ondelettes classiques

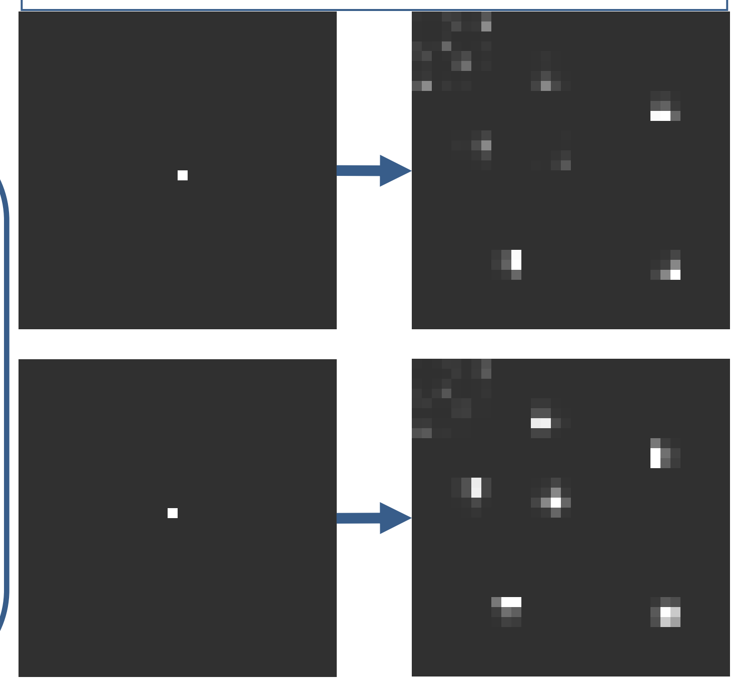
AVANTAGES

- Separation des details
- Différentes échelles

APPLICATIONS

- JPEG-2000, MPEG-4 …
- RdF, Classification …

Variance par translation



INCONVENIENTS

- **Oscillations** autour des singularités
- **Variance** / translation – Pas de **phase**
- Faible **directionalité**

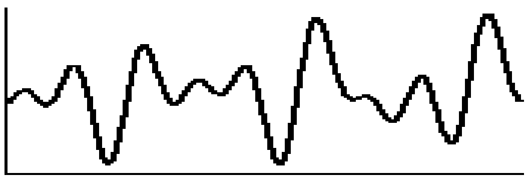
ALTERNATIVES

Ridgelets, Bandlets, Contourlets **…**

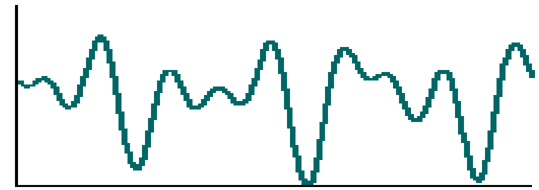
Signal Analytique

Transformée de Hilbert : $s_H(t) = s(t) * 1/\pi t$ *"déphasage pur"*

Signal original s(t)



Signal déphasé $s_H(t)$



Signal analytique :

$$s_A(t) = s(t) + \mathbf{i}\, s_H(t)$$

$$= A(t)\, e^{\mathbf{i}\,\phi(t)}$$

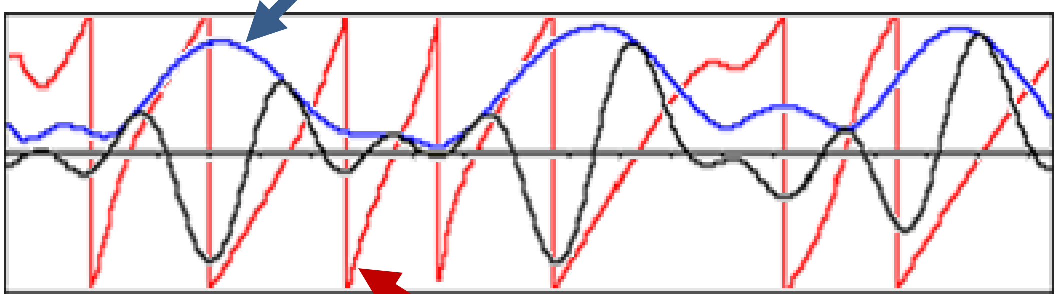
$$\mathbb{C}$$

Donc :

$$s(t) = A(t) \cos(\, \phi(t)\,)$$

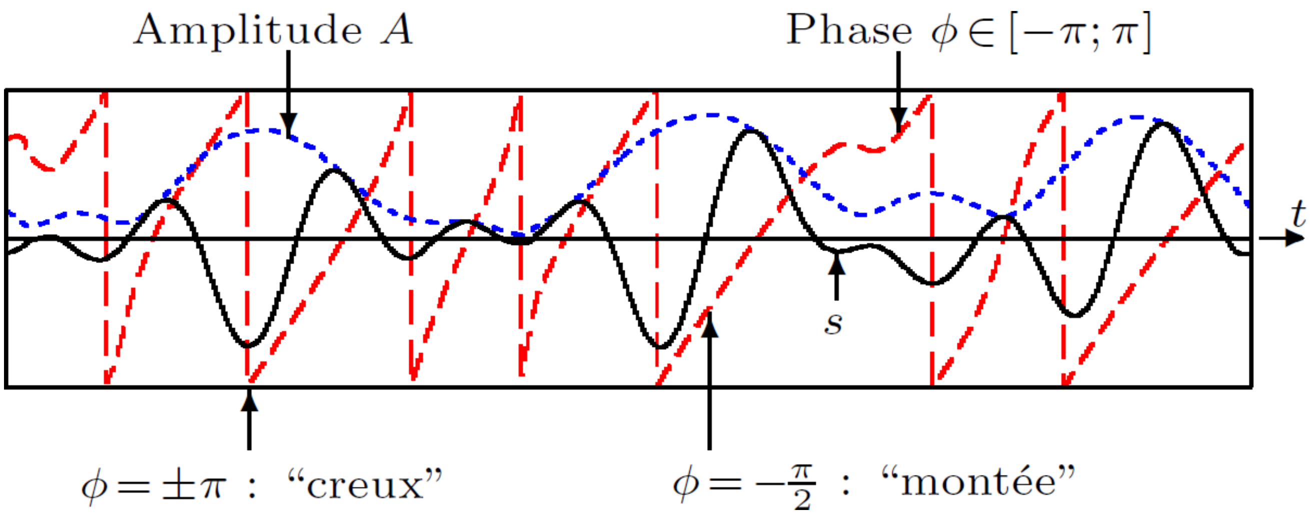
= Représentation "AM/FM"

Amplitude $A(t)$



Phase $\phi(t)$

Phase



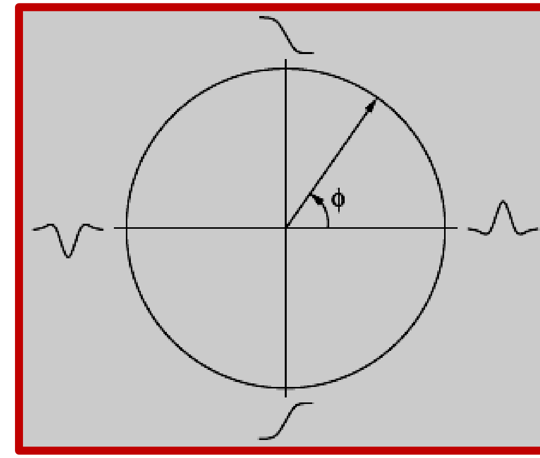
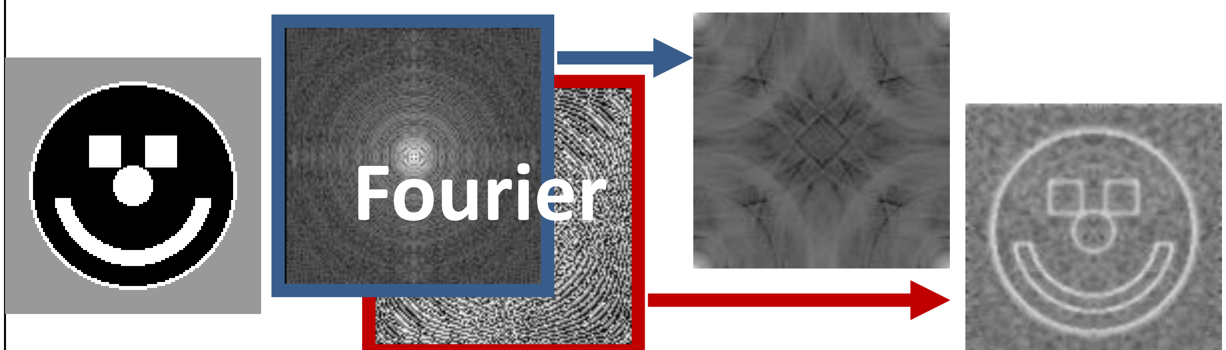


Image tirée de la thèse de T. Bülow

Importance de la phase de Fourier:



Phase = “Structure”

Amplitude = “Présence”

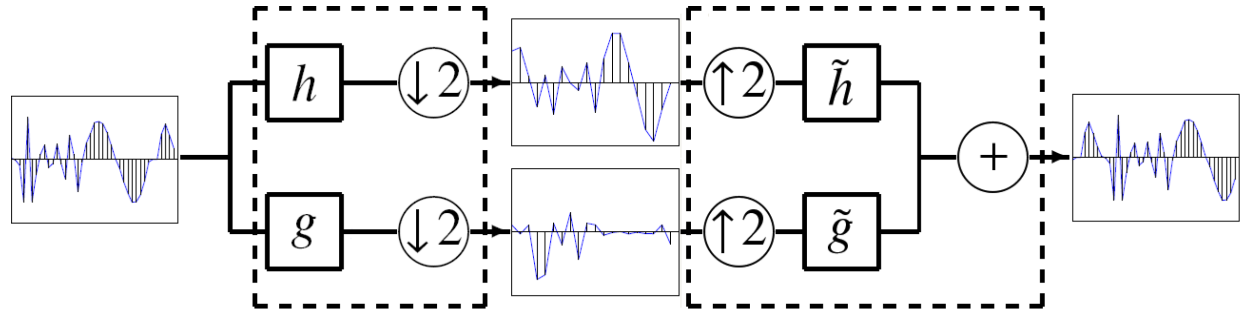
→ Ondelettes analytiques ?

→ 2D (images)?

Ondelettes analytiques 1D : Dual-Tree

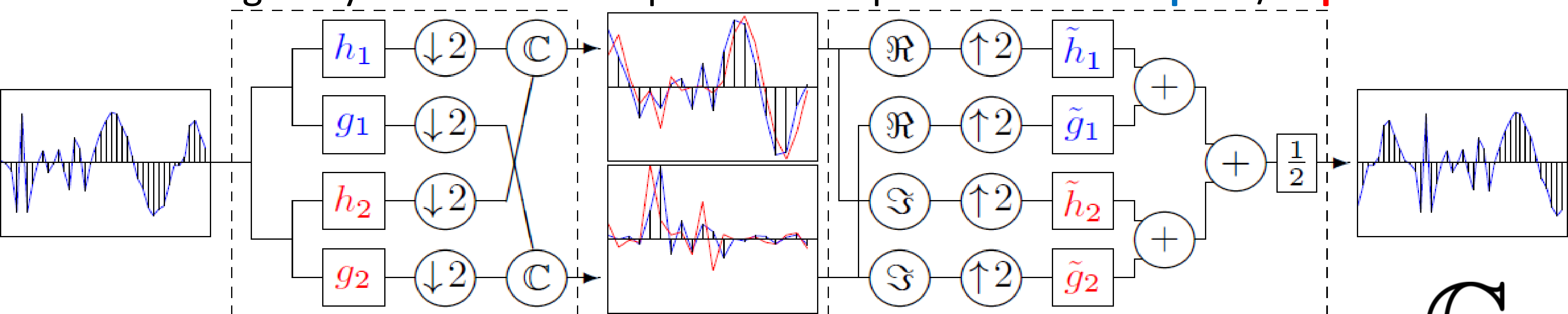
Ondelettes classique :

(Mallat 1989)



Variance/translation ⇔ **échantillonnage** critique

N. Kingsbury 2001 : **2** décompositions en parallèle - filtres **pairs**/**impairs** :



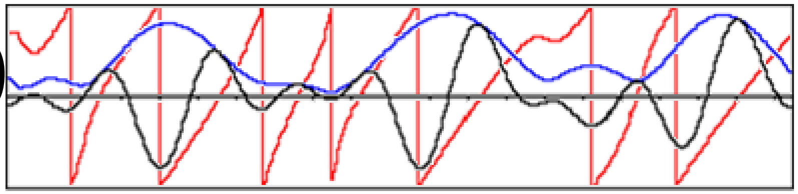
→ **Invariance** par translation (module) **+ Equivalence avec Hilbert** $\mathbb{C}$

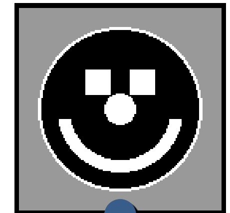
→ Ondelettes **analytiques** implantables : Amélioration de la DWT

Phase ? 2D ? Géométrie ?

Généralisation 2D

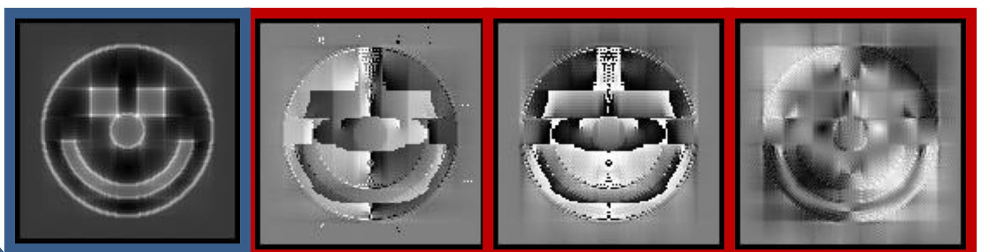
Signal analytique “classique”

1D  $\mathbb{C}$

 2D

$\mathbb{H}$ $\mathcal{G}_3$

Signal quaternionique-analytique (Bülow)



Signal monogène (Felsberg)

- Notion nouvelle de “phase 2D”
- Lien / structures géométriques

Phase = “Structure”

Amplitude = “Présence”

Algebre des quaternions – Signaux 2D

$\mathbb{H}$

Generalization des nombres complexes,

3 parties imaginaires : **i**,**j**,**k**.

ij = -ji = k **$i^2 = j^2 = k^2 = 1$**

Forme cartésienne : q = a + b**i** + c**j** + d**k**

Forme polaire : $q = |q| e^{i\varphi} e^{j\theta} e^{k\psi}$

3 angles

$$|q| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2(cd+ab)}{a^2 - b^2 + c^2 - d^2}\right)$$

$$\theta = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2(bd+ac)}{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}\right)$$

$$\psi = -\frac{1}{2}\arcsin(2(bc - ad))$$

$$(\varphi, \theta, \psi) \in [-\pi, \pi[\times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$$

Thomas Bülow (thèse – 1999) :

- *“Les complexes ne sont pas suffisants pour les signaux 2D”*
- Transf. De Fourier quaternionique (2D)
- Signal quaternionique-analytique (2D)

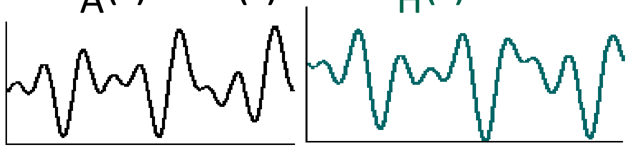
Signal Quaternionique Analytique

1D

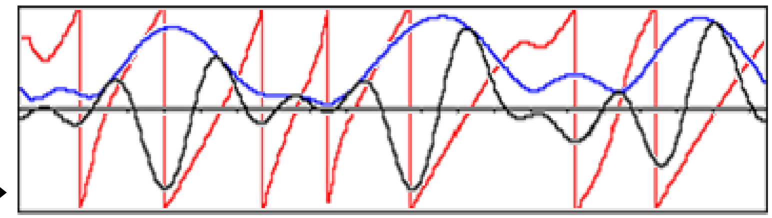
Signal analytique classique

Hilbert

$s_A(t) = s(t) + \mathbf{i}\, s_H(t)$



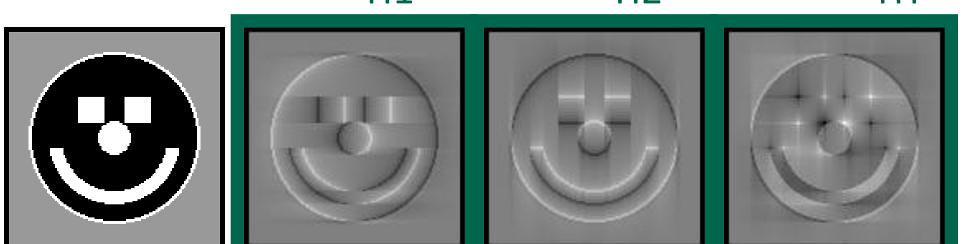
$\mathbb{C}$ ⇒



Amplitude = "Presence"
Phase = "Structure"

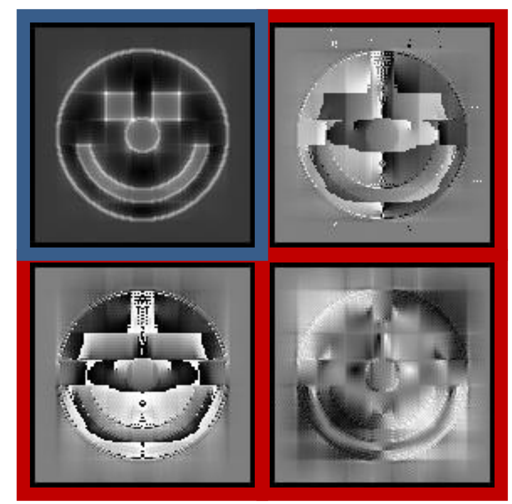
2D Signal quaternionique-analytique
(T. Bülow 1999)

$s_A(x,y) = s(x,y) + \mathbf{i}\, s_{H1}(x,y) + \mathbf{j}\, s_{H2}(x,y) + \mathbf{k}\, s_{HT}(x,y)$



Hilbert 2D **séparable**

$\mathbb{H}$ ⇒



Ondelettes?

Ondelettes quaternioniques / Dual-Tree $\mathbb{H}$

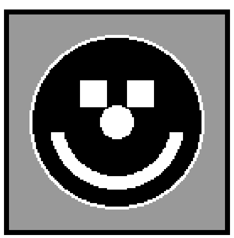
Definition continue:
Ond. réelle → extension analytique
(transformée redondante)

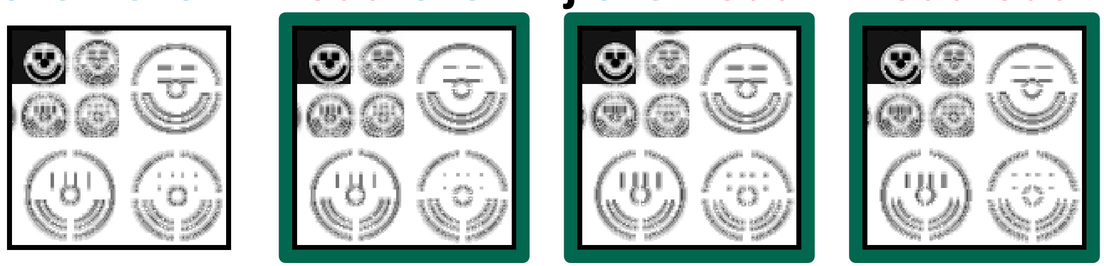
$$\psi^H(x,y) = \psi_1^H(x,y) + \mathbf{i}\,\psi_2^H(x,y) + \mathbf{j}\,\psi_3^H(x,y) + \mathbf{k}\,\psi_4^H(x,y)$$
$$\psi^V(x,y) = \psi_1^V(x,y) + \mathbf{i}\,\psi_2^V(x,y) + \mathbf{j}\,\psi_3^V(x,y) + \mathbf{k}\,\psi_4^V(x,y)$$
$$\psi^D(x,y) = \psi_1^D(x,y) + \mathbf{i}\,\psi_2^D(x,y) + \mathbf{j}\,\psi_3^D(x,y) + \mathbf{k}\,\psi_4^D(x,y)$$

Implantation 2D **séparable** du **Dual-Tree**

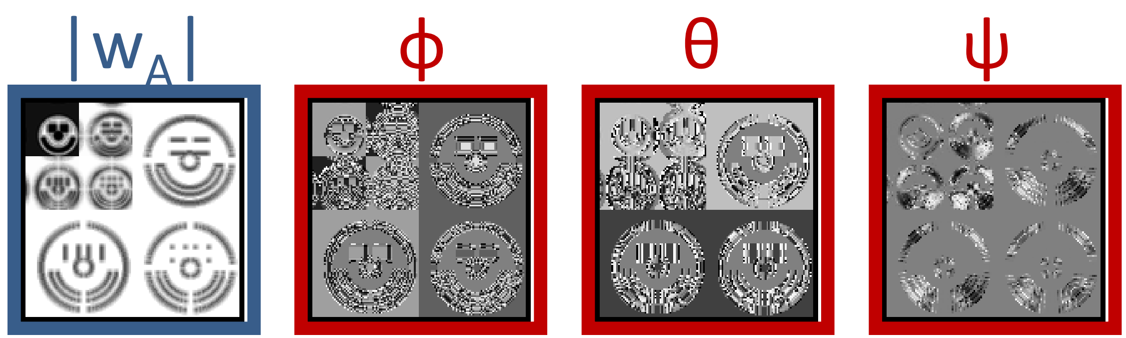
→ **4** bancs de filtres ⇔ **Hilbert 2D** → Ondelettes 2D **analytiques**

QWT = **even-even** + **i** **odd-even** + **j** **even-odd** + **k** **odd-odd**





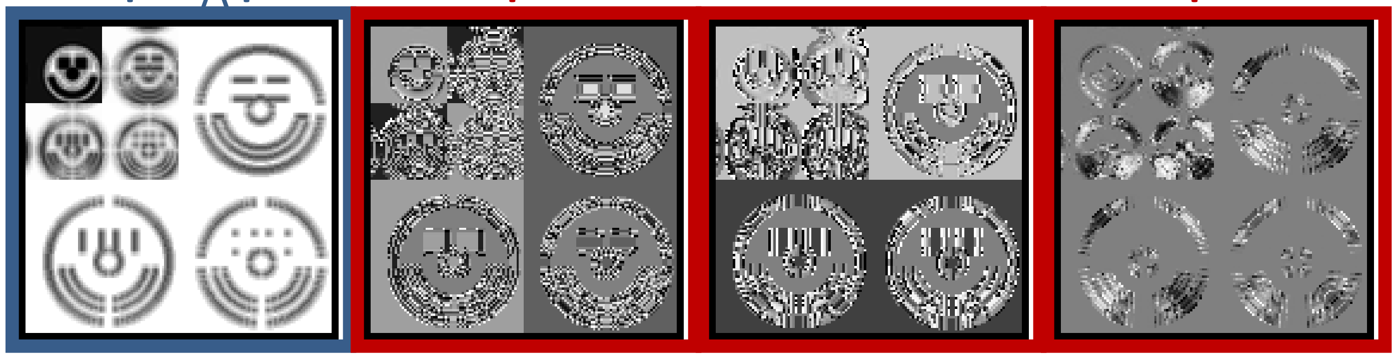
Forme polaire



Interprétation

$|w_A|$ ϕ θ ψ

Amplitude
***inv./translation* :**
« Presence d'éléments 2D»



Texture (?)

Fourier quaternionique (Bülow)

Shift theorem :

$$f_2(x,y) = f_1(x - r_x, y - r_y) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \varphi_2(u,v) \\ \theta_2(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(u,v) - 2\pi u r_x \\ \theta_1(u,v) - 2\pi v r_y \end{pmatrix}$$

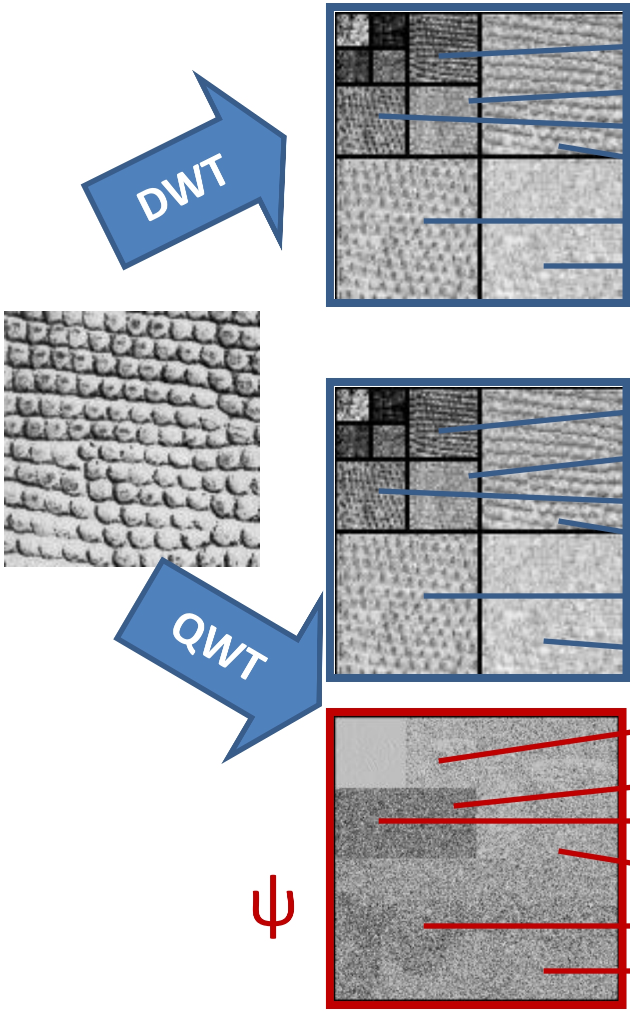
→ (**ϕ**,**θ**) = <u>Décalage</u> local → Flot optique

Littérature / QWT très pauvre :
T. Bülow 1999 : Signal quaternionique,
W. Chan et. al. 2004 : QWT,
E. Bayro-Corrochano 2006 : QWT continue,
J. Zhou et. al. 2007 : Flot optique.

Objectif du travail :
- Caractérisation de la transformation
- Utilisation dans un schéma de RdF + compression

Application 1 : Classification de Textures

Extraction du descripteur *classique* : 1 mesure / sous-bande



$$\begin{bmatrix} 0.2 \\ 1.09 \\ 2.1 \\ 6 \\ 3.256 \\ 0.04 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10.2 \\ 0.09 \\ 2 \\ 4.6 \\ 0.25 \\ 1.04 \\ 0.5 \\ 9.23 \\ 8.1 \\ 11.5 \\ 3.04 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Mesure sur module :

$$m = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i,j}(M_{i,j} - \mu)^2}$$

écart-type

Mesure sur ψ :

$$m = \sqrt{\sum_{i,j} |q|_{i,j} (\psi_{i,j} - \mu)^2}$$

$$\text{avec } \sum_{i,j} |q|_{i,j} = 1$$

écart-type pondéré

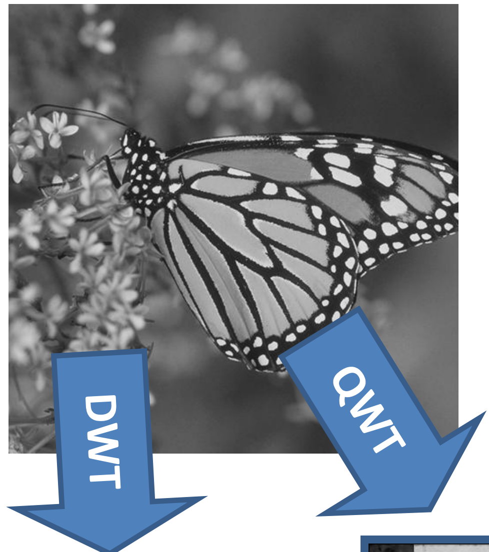
<u>Reconnaissance :</u>

DWT : **70%**

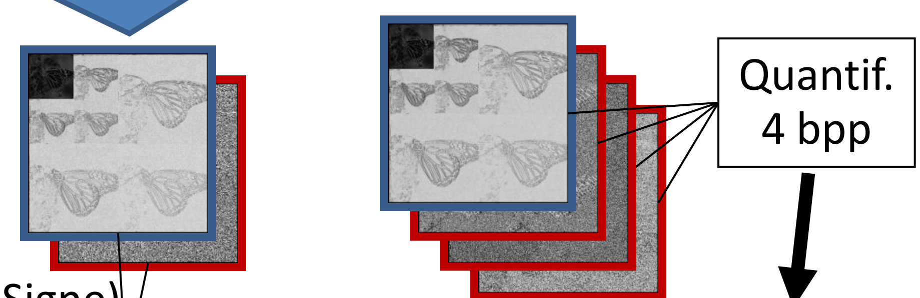
QWT module seul : 70%
QWT phase seule : 70%
CWT module : 70%

QWT : **80%**

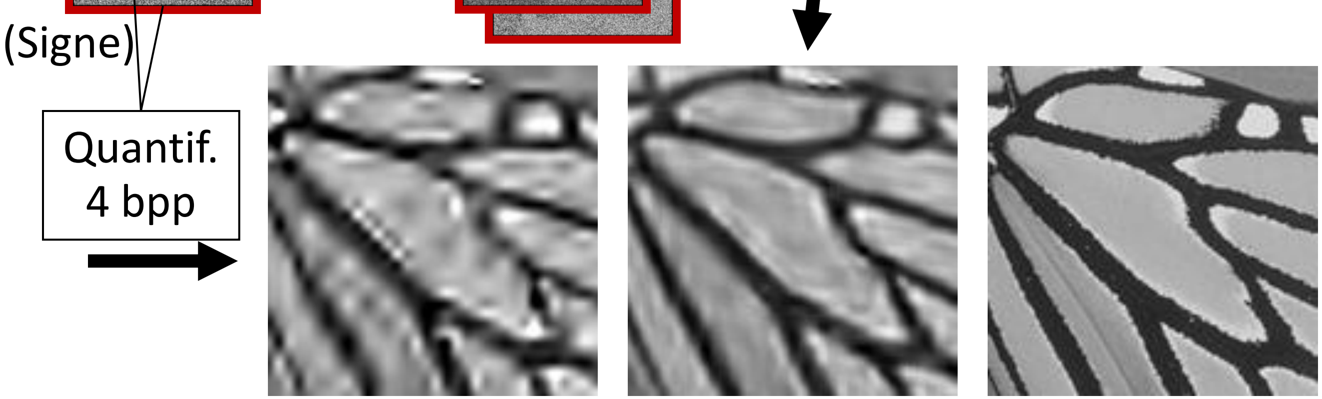
Application 2 : Compression



PB / QWT : transformée **redondante**
MAIS : 1) Info mieux répartie
2) codage *léger* de la **phase**.
⇒ algo. quantification Amplitude/Phase
- Conserve bien les structures,
- Reconstruit moins bien les « textures » (PSNR)



Bon résultat / forte quantification

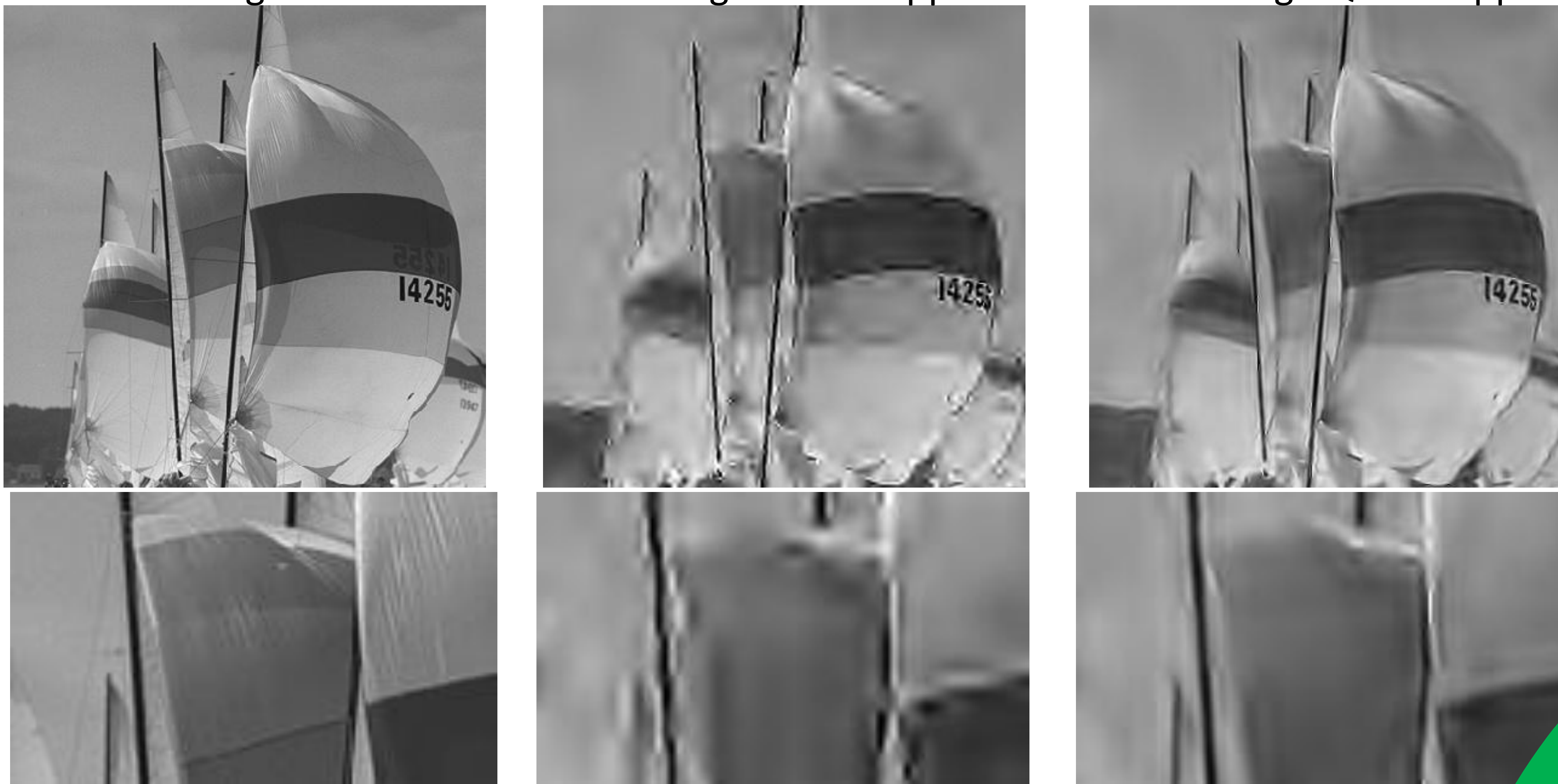


(Zooms)

Original (8 bpp)

Application 2 : Compression

Original | Codage DWT 5 bpp | Codage QWT 5 bpp



et dans une chaîne de codage complète?

→ Integration dans un algo. *type* EZW : difficultés / organisation du flux

Perspectives : - Optimiser codage phase (beaucoup de paramètres)

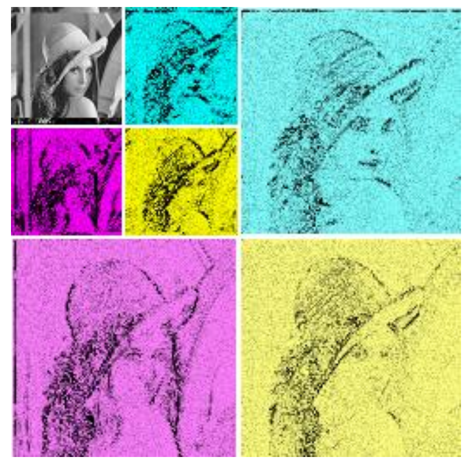
- Hierarchiser les données (transmission MIMO)

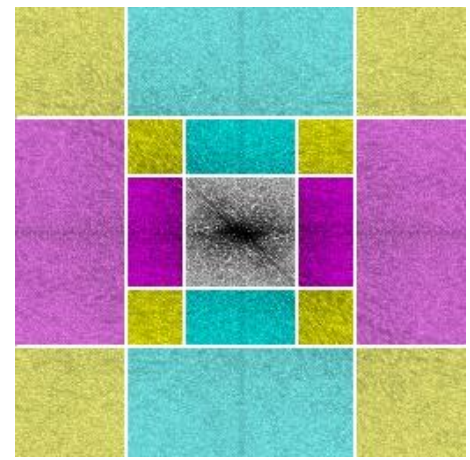
Bilan QWT

- Avancée : Compréhension phase QWT
- QWT **>** DWT en classification de textures et en compression.

LIMITES

- Variance / Rotation
- Structure séparable
- Phase compliquée





Solution : Signal monogène ?

→ Invariant par rotation

→ Facile à interpréter

→ Défini dans $\mathcal{G}_3$

Algèbre Géométrique

$\mathcal{G}_3$

$\mathcal{G}_3$ = {"**Multivecteurs**"}

$$M = \underbrace{M_0 1}_{scalaire} + \underbrace{M_1 e_1 + M_2 e_2 + M_3 e_3}_{vecteur} + \underbrace{M_{23} e_{23} + M_{31} e_{31} + M_{12} e_{12}}_{bivecteur} + \underbrace{M_{123} I_3}_{pseudoscalaire}$$

<u>Opérations</u>

Addition : a + b

Produit interne : a ∧ b

Produit externe : a · b

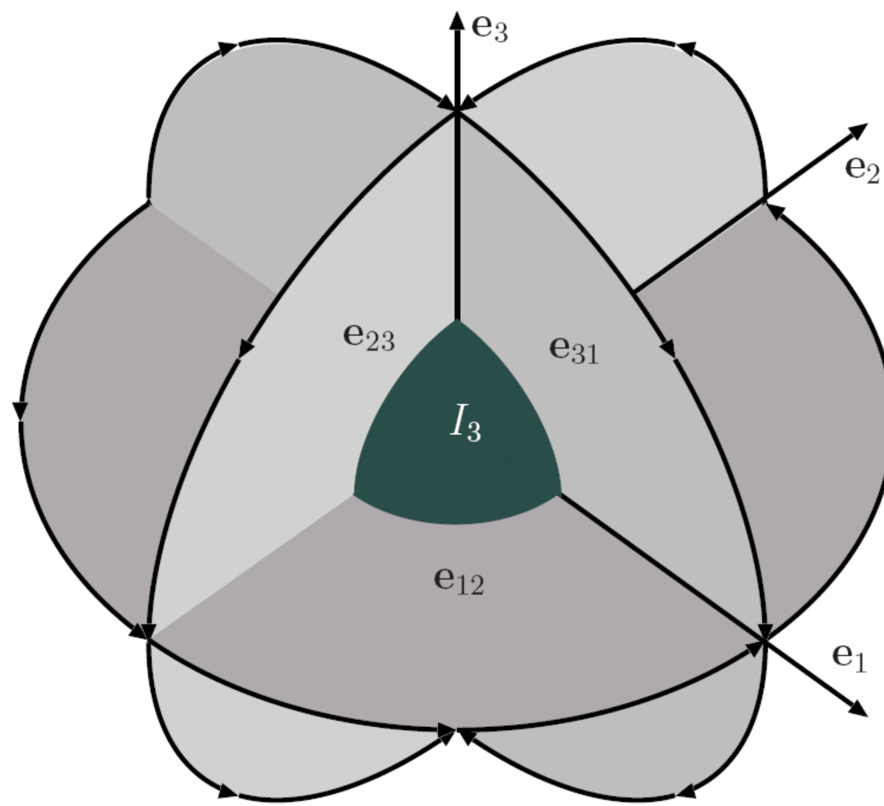
Produit géométrique : ab

Spineurs : analogie avec $e^{i\phi}$ de $\mathbb{C}$.

« **Opérateur de rotation 3D** »

(Isomorphe à $\mathbb{H}$)

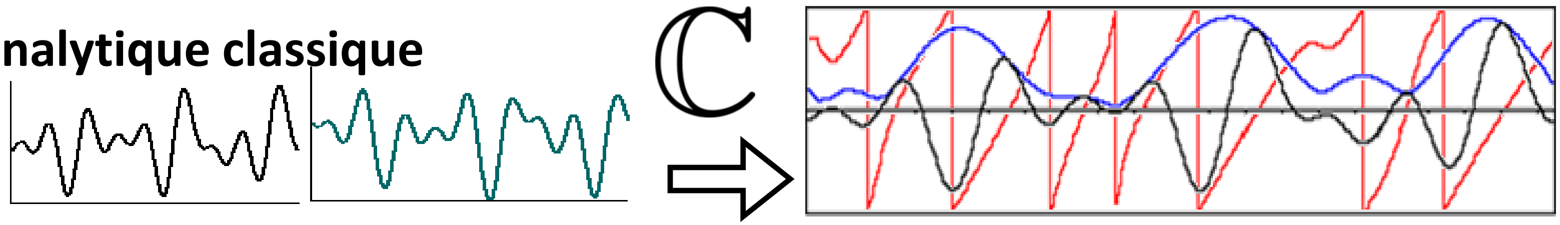
$$s = \underbrace{a 1}_{scalaire} + \underbrace{b e_{23} + c e_{31} + d e_{12}}_{bivecteur}$$



Signal Monogène

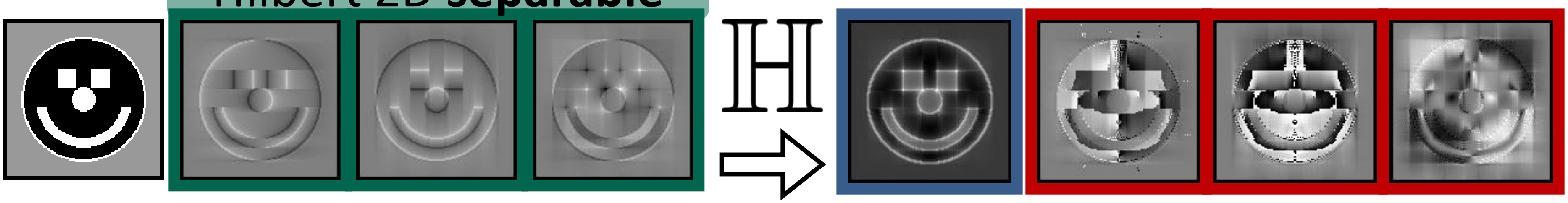
1D **Signal analytique classique**

Hilbert



2D **Signal quaternionique-analytique**

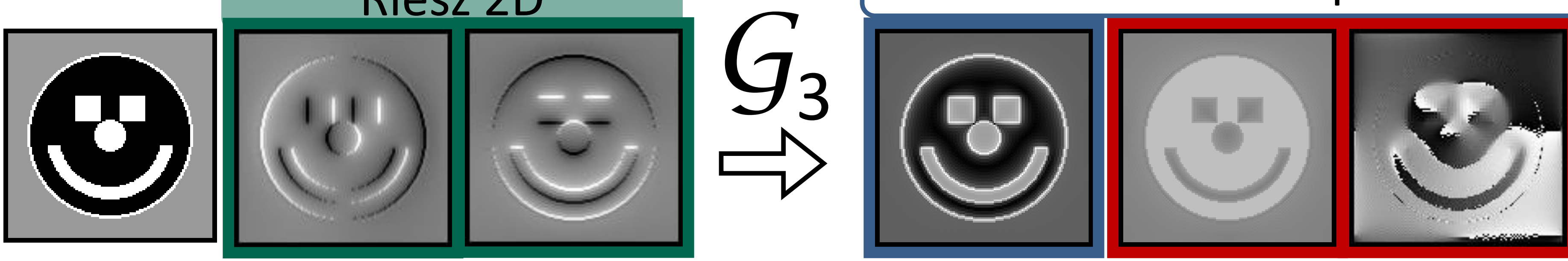
Hilbert 2D **séparable**



2D **Signal monogénique**

Riesz 2D

Plus facile à interpréter!



Signal Monogène (Felsberg, 2001)

Point de vue *signal* :

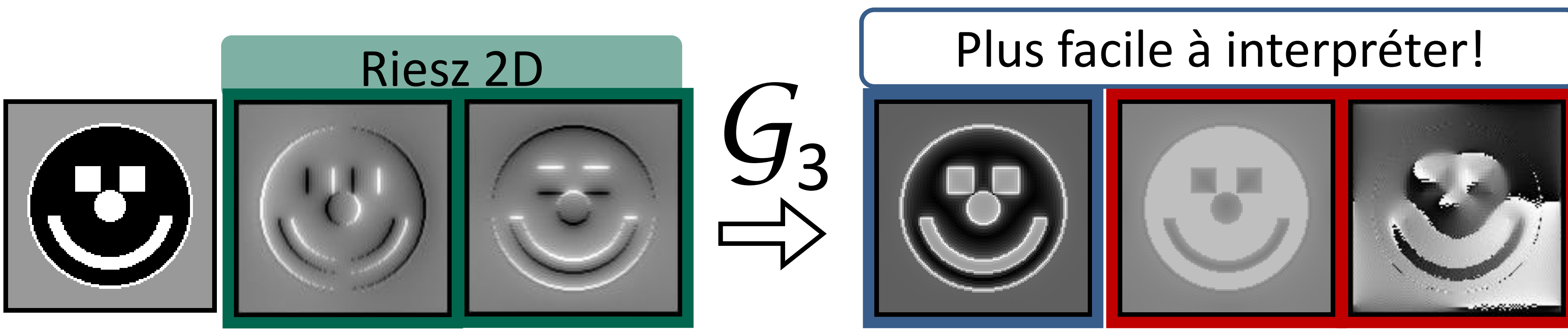
-Transf. Hilbert $\mathcal{H}\{f\} = \frac{1}{\pi t} * f(t) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad -\boldsymbol{j}\frac{\omega}{|\omega|}\hat{f}(\omega)$ ⇔ “déphasage pur” (1D)

-Transf. Riesz $\mathcal{R}\{f\} = \frac{x + \boldsymbol{j}y}{2\pi(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} * f(x,y) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad \frac{-\boldsymbol{j}\omega_x + \omega_y}{\sqrt{\omega_x^2+\omega_y^2}}\hat{f}(\omega_x,\omega_y)$

⇔ “déphasage pur 2D isotropique”

Point de vue *mathématique* :

- Signal analytique = “extension holomorphe restreinte à l’axe réel”
- “Fonction holomorphe” ⇔ “Champ harmonique 2D” (Laplacien 2D)
- Généralisation avec les champs harmoniques 3D (Laplacien 3D) -> Riesz



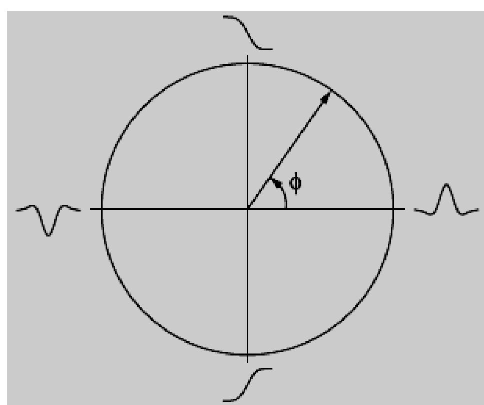
Phase Monogène

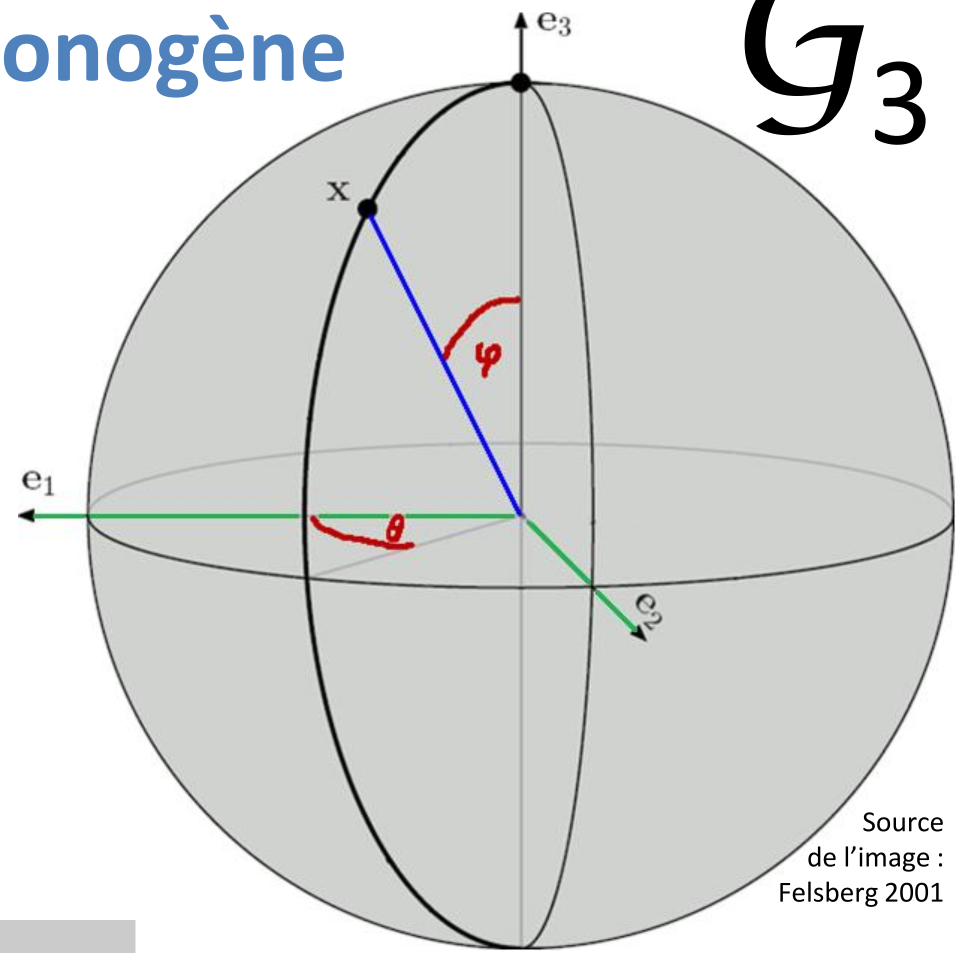
$\mathcal{G}_3$

M. Felsberg 2001 :
Equivalence entre **Riesz** et
Hilbert 1D dans le domaine de **Radon**

Présence　Orientation　Phase 1D

Résoud le pb de directionnalité / QWT





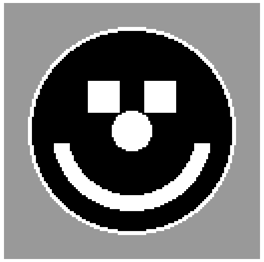
Source de l'image : Felsberg 2001

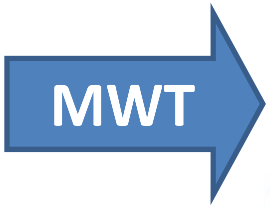
Ondelettes?

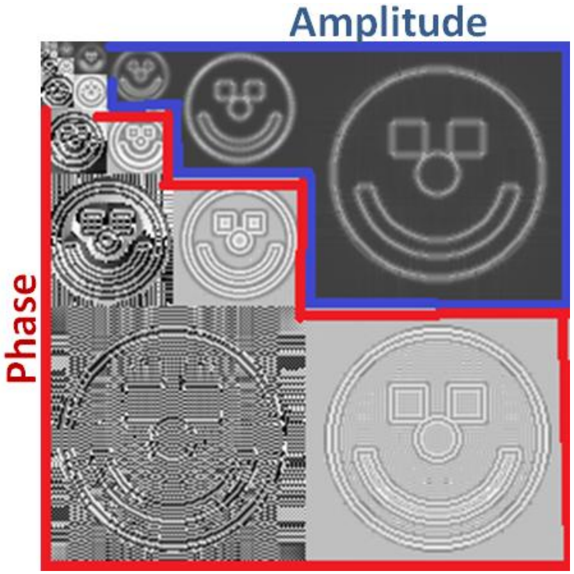
Ondelettes Monogènes

IDEE : - Transformée non-séparable (isotropique?)
- Une seule sous-bande par échelle
- Coefficients « monogènes » = module + phase + orientation

M. Unser *et al.* 2009







Ondelettes Monogènes (M. Unser)

1 Transformée réelle // 1 Transformée complexe (« Riesz »)

- Fonction d'échelle :
(spline polyharmonique)
  -> approx. isotropique

$$\varphi_\gamma \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{\left(4(\sin^2\frac{\omega_1}{2}+\sin^2\frac{\omega_2}{2})-\frac{8}{3}\sin^2\frac{\omega_1}{2}\sin^2\frac{\omega_2}{2}\right)^{\frac{\gamma}{2}}}{\|\boldsymbol{\omega}\|^\gamma}$$

- Ondelette 1 (réelle) :

$$\psi(\boldsymbol{x}) = (-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}}\ \varphi_{2\gamma}(2\boldsymbol{x})$$

- Ondelette 2 :
(Partie « Riesz » complexe)

$$\psi' = -\left(\frac{x}{2\pi\|\boldsymbol{x}\|^3} * \psi(\boldsymbol{x})\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{y}{2\pi\|\boldsymbol{x}\|^3} * \psi(\boldsymbol{x})\right)$$

- Décomposition en Pyramide dyadique (trame)
- Banc de filtres discret non-séparable
- Approx. Isotropique et steerable
- Reconstruction optimale / algo. « *subband regression* »
- Redondance = 4:1

Ouvert : Le filtre « Riesz » correspondant semble non discret…

Ondelettes Monogènes

Pistes

– Version isotropique

Radon discrète + Dual-Tree

« Riesz ⇔ Radon + Hilbert »

(Ridgelets?)

– Version non redondante :

Définir un banc de filtres à *échantillonage critique* dyadique H_0, H_1, H_2, H_3 tel que

« (H_2, H_3) = Riesz$\{H_1\}$ »

(impasse?)

– Extension couleur

Algèbres géométriques

Ondelettes Monogènes Couleur

-> Signal monogène couleur (Demarcq 2010) :
Extension dans $\mathcal{G}_5$ du signal monogène de M. Felsberg

Généralisation des équations de Cauchy-Riemann (fonctions holomorphes)

Signal analytique 1D,
Défini dans $\mathbb{C}$ ou dans $\mathcal{G}_2$

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & \text{if } y > 0 \\ e_2 \dfrac{\partial u}{\partial y} = f(x) & \text{if } y = 0 \end{cases}$$

Signal monogène 2D,
Défini dans $\mathcal{G}_3$

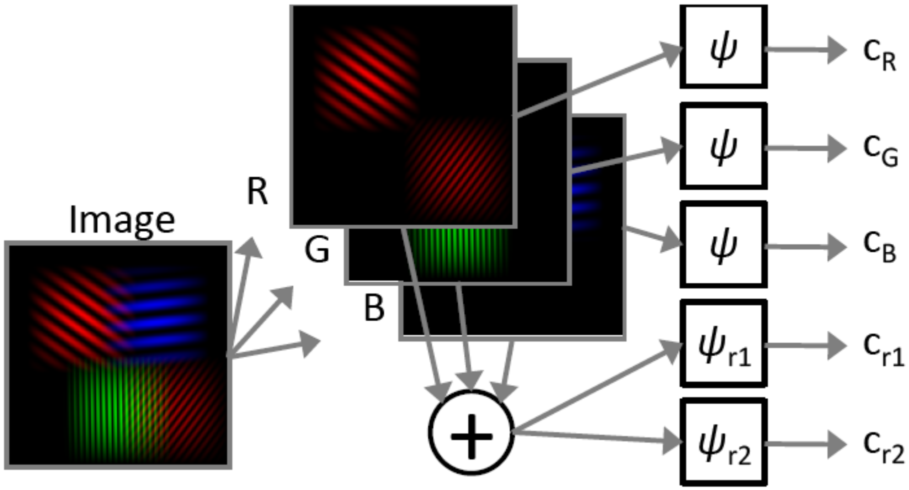
$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 & \text{si } z > 0 \\ e_3 \dfrac{\partial u}{\partial z} = f(x, y) & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

Signal monogène couleur
-*Genre* marginal
- Pas de représentation polaire
- 1 Phase paramétrée

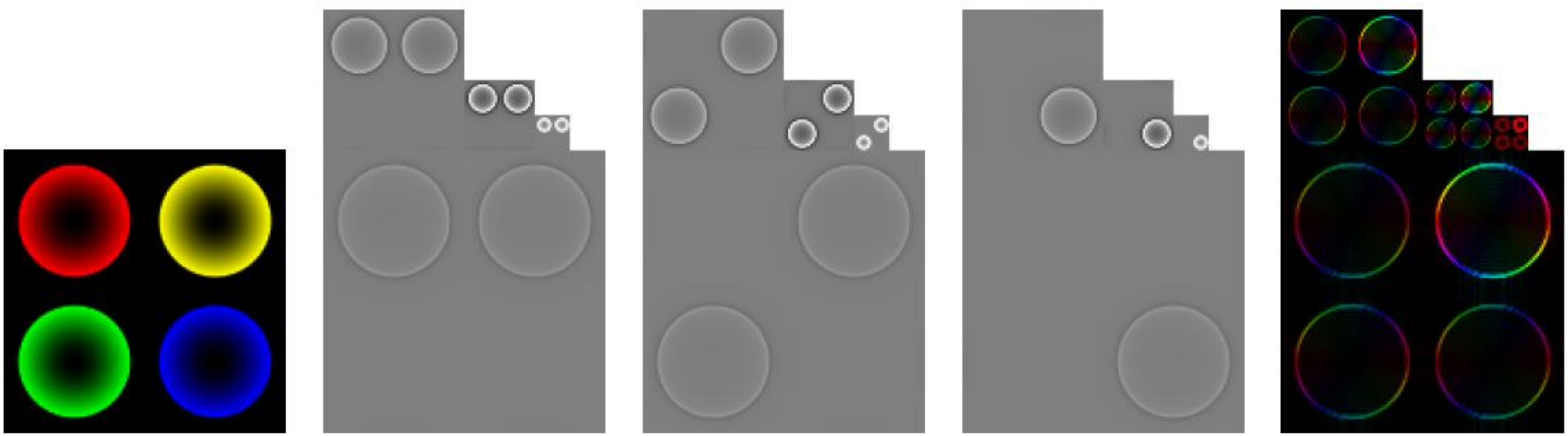
$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_4^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_5^2} = 0 \\ e_3 \dfrac{\partial u}{\partial x_3} + e_4 \dfrac{\partial u}{\partial x_4} + e_5 \dfrac{\partial u}{\partial x_5} = f(x_1, x_2) \end{cases}$$

Signal monogène 2D couleur ($\mathcal{G}_5$)

Ondelettes Monogènes Couleur

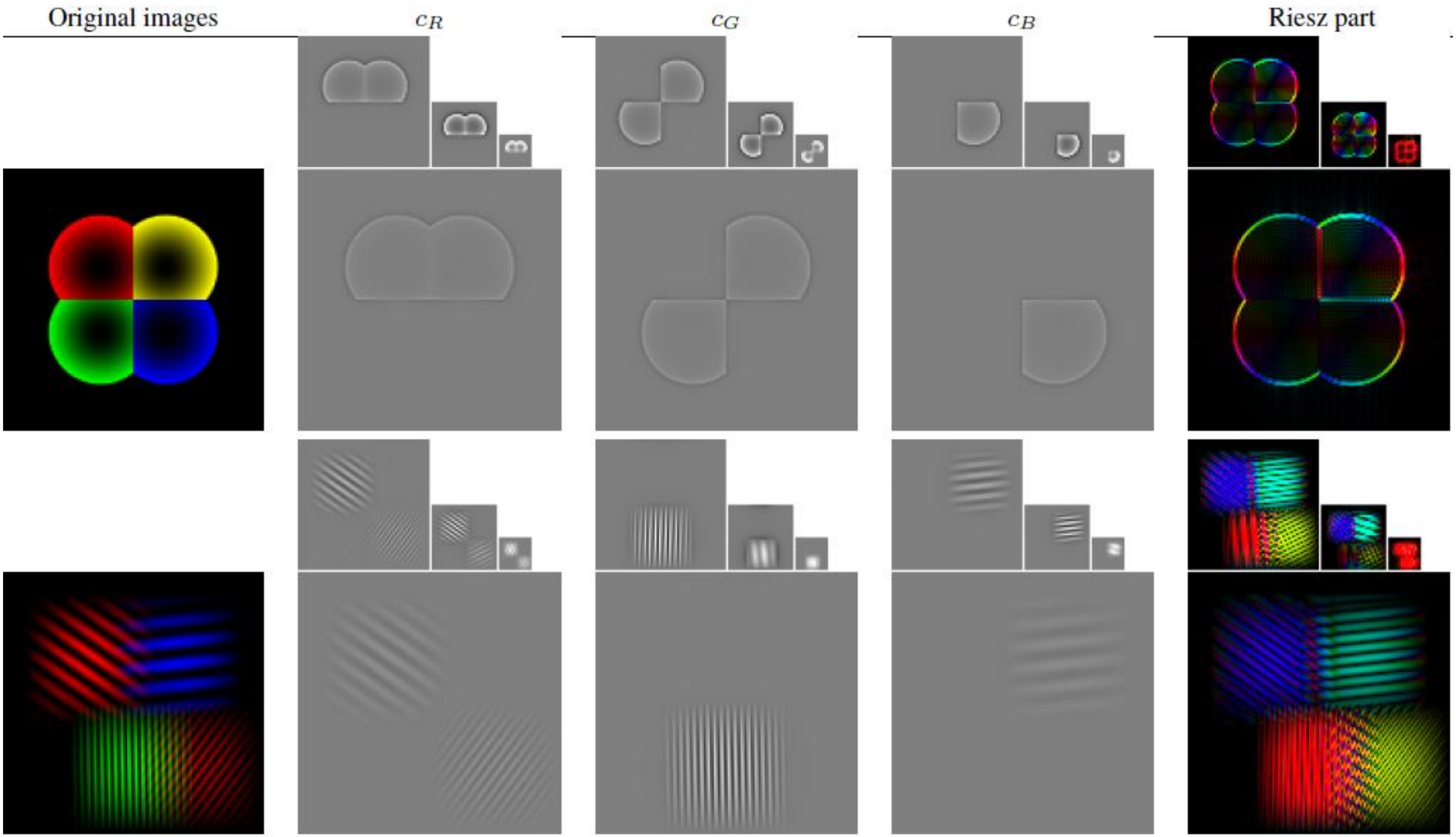


- Non-marginal (pas strictement…)
- Redondance 20:9 (~2.2)
- Analyse directionelle



Original image c_R c_G c_B Riesz part

Ondelettes Monogènes Couleur



Conclusion

- QWT : **amélioration de DWT** / traitement du signal dans H
  → Notion de **phase** + **invariance** / translation
- Validation pratique : classification, compression
  → Analyse locale des **structures** grâce à la phase
  → Représentation cohérente grâce à l'invariance
- MWT : Amélioration de la QWT / traitement du signal dans G3
- Ondelettes couleur non marginales

PERSPECTIVES

- Compression MWT
- Signal analytique couleur
- Analytique non redondant?
- Analytique discret? Hilbert/Riesz discret?

Merci de votre attention ☺