

Spectre d'un signal échantillonné

On considère le signal $x(t) = e^{-\sigma|t|} \cos(2\pi f_0 t)$. On prendra $f_0 = 30\text{Hz}$. On rappelle que la Transformée de Fourier (TF) de x est

$$\hat{x}(f) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{\sigma^2 + 4\pi^2(f - f_0)^2} + \frac{\sigma}{\sigma^2 + 4\pi^2(f + f_0)^2} \right).$$

1. Comment varie l'allure de $\hat{x}(f)$ lorsque σ augmente? Tracer sur un même graphique $\hat{x}(f)$ pour $\sigma = 5$ et $\sigma = 15$. Quelle propriété générale ces courbes illustrent-elles?

Dans la suite, on prend $\sigma = 15$. On considère l'échantillonnage uniforme de $x(t)$ à une période T_e . On note $x_n = x(nT_e)$

2. Existe-t-il des valeurs de T_e assurant la reconstruction parfaite de $x(t)$ à partir de ses échantillons? Soit

$$\hat{\mathcal{X}}_e(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{x}\left(f - \frac{n}{T_e}\right) \quad (1)$$

le spectre du signal échantillonné.

3. Pour les trois cas $\frac{1}{T_e^{(1)}} = 120\text{ Hz}$, $\frac{1}{T_e^{(2)}} = 70\text{ Hz}$ et $\frac{1}{T_e^{(3)}} = 30\text{ Hz}$, représenter sur trois graphiques en regard (commande `subplot`) la fonction $\hat{\mathcal{X}}_e(f)$ dans la bande $[-\frac{1}{2T_e}, \frac{1}{2T_e}]$ (justifier grossièrement pourquoi ne prendre qu'une vingtaine de termes dans (1) constitue une approximation raisonnable). Conclure quant à la reconstruction de $x(t)$ à partir des échantillons.
4. On s'intéresse au cas "limite" $\frac{1}{T_e^{(2)}} = 70\text{ Hz}$. Comparer $\hat{x}(f)$ et $T_e \hat{\mathcal{X}}_e(f)$. Avant l'opération d'échantillonnage, on suppose qu'on utilise un filtre anti-repliement idéal (passe-bas de fréquence de coupure $\frac{1}{2T_e}$). Comparer maintenant $\hat{x}(f)$ et $T_e \hat{\mathcal{X}}_e(f)$.