

# MASTER AUTOMATIQUE ET SYSTÈMES DE PRODUCTION

Spécialité : Traitement du Signal

Année 2006–2007

Thèse de Master ASP

Présentée et soutenue par :

Emilie CHOUZENOUX

Le 18 septembre 2007

A l'Institut de Recherche en Communication et Cybernétique de Nantes

TITRE

## Modélisation du problème direct en tomographie axiale

JURY

<i>Président :</i>	M. F. LUCAS	Maître de Conférences, Ecole Centrale Nantes
<i>Examineurs :</i>	E. Le CARPENTIER	Maître de Conférences, Ecole Centrale Nantes
	C. DONCARLI	Professeur des Universités, Ecole Centrale Nantes
	J.-M. PIASCO	Maître de Conférences, Ecole Centrale Nantes
<i>Directeurs :</i>	J. IDIER	Directeur de Recherche CNRS
	S. MOUSSAOUI	Maître de Conférences, Ecole Centrale Nantes
	Y. GOUSSARD	Professeur des Universités, Ecole Polytechnique Montréal
<i>Laboratoire :</i>	Institut de Recherche en Communication et Cybernétique de Nantes	



# Remerciements

*Avant de vous rapporter mon stage, je voudrais présenter mes remerciements aux personnes qui ont joué un rôle clé dans son bon déroulement :*

*Merci à M. Jérôme Idier, chargé de recherche au CNRS-IRCCYN, M. Yves Goussard, professeur à l'École Polytechnique de Montréal et M. Saïd Moussaoui, maître de conférence à l'École Centrale Nantes pour m'avoir encadré tout au long de ce projet et pour leurs précieux conseils au quotidien.*

*Je remercie également tous les membres de l'équipe de recherche de la section biomédicale de l'École Polytechnique de Montréal, pour leur accueil très chaleureux.*



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>ii</b>
<b>1 La tomographie</b>	<b>3</b>
1.1 Présentation générale . . . . .	3
1.2 Le principe physique . . . . .	3
1.2.1 Les rayons X . . . . .	3
1.2.2 Génération des rayons X . . . . .	4
1.2.3 Intéraction des rayons X avec la matière . . . . .	4
1.2.4 La largeur des détecteurs . . . . .	5
1.3 Acquisition des données . . . . .	6
1.4 La reconstruction . . . . .	9
1.4.1 Introduction . . . . .	9
1.4.2 Le modèle usuel en reconstruction itérative . . . . .	9
1.4.3 Présentation du critère à minimiser . . . . .	10
1.5 Problématiques . . . . .	12
<b>2 Les bases de fonctions utilisées dans le cadre de la tomographie</b>	<b>13</b>
2.1 Généralisation du problème direct dans le cas d'une base de décomposition quelconque	13
2.1.1 Calcul des projections . . . . .	16
2.2 Fonctions séparables . . . . .	17
2.2.1 Méthode de calcul des $w_{ij}$ dans le cas d'une base séparable quelconque ([7]) . .	18
2.2.2 Discrétisation sur une base de pixels uniformes . . . . .	19
2.2.3 Autres bases de fonctions séparables . . . . .	21
2.2.4 Conclusion . . . . .	21
2.3 Fonctions à symétrie circulaire . . . . .	21
2.3.1 Méthode de calcul des $w_{ij}$ dans le cas d'une base à symétrie circulaire quelconque (Généralisation de [12]) . . . . .	22
2.3.2 Autres bases de fonctions à symétrie circulaire . . . . .	24
2.3.3 Conséquences sur le calcul de $H$ . . . . .	25
2.4 La base des pixels gaussiens . . . . .	25
2.4.1 Caractère creux de la matrice de projection . . . . .	25
2.5 Conclusion . . . . .	26

<b>3</b>	<b>La base de pixels gaussiens</b>	<b>27</b>
3.1	Décomposition d'un signal 1D . . . . .	27
3.1.1	Position du problème . . . . .	27
3.1.2	Construction de $b$ . . . . .	28
3.1.3	Structure de la matrice $A$ . . . . .	29
3.1.4	Inversion du système $A\mu = b$ par approximation circulante . . . . .	29
3.1.5	Résolution du système $A\mu = b$ sous l'hypothèse $\sigma$ petit . . . . .	33
3.1.6	Mise en œuvre . . . . .	36
3.1.7	Résultats . . . . .	36
3.1.8	Analyse des résultats . . . . .	40
3.1.9	Différence avec une interpolation . . . . .	43
3.2	Décomposition d'un signal 2D . . . . .	44
3.2.1	Position du problème . . . . .	44
3.2.2	Calcul des éléments des matrices $P$ et $Q$ . . . . .	45
3.2.3	Formation du vecteur $b$ . . . . .	46
3.2.4	Inversion du système . . . . .	46
3.2.5	Application . . . . .	47
3.3	Analyse comparative de deux bases de représentation différentes . . . . .	51
3.3.1	Position du problème . . . . .	51
3.3.2	Application . . . . .	51
3.3.3	Interprétation . . . . .	54
3.4	Influence du choix de la base de représentation sur la qualité du modèle de mesure . . . . .	54
3.4.1	Position du problème . . . . .	54
3.4.2	Méthodologie . . . . .	54
3.4.3	Mise en œuvre . . . . .	55
3.4.4	Analyse des résultats . . . . .	56
3.4.5	Conclusion . . . . .	56
3.5	Influence du choix de la base sur la reconstruction . . . . .	57
3.5.1	Résultats . . . . .	58
3.5.2	Analyse des résultats . . . . .	60
3.5.3	Facteur de détermination . . . . .	60
3.6	Conclusion . . . . .	61
<b>4</b>	<b>Prise en compte de l'épaisseur des faisceaux de rayons X</b>	<b>63</b>
4.1	Introduction . . . . .	63
4.2	Modification de la loi d'atténuation . . . . .	64
4.3	Modification du critère à minimiser . . . . .	64
4.4	Génération de données simulant l'épaisseur du faisceau . . . . .	66
4.4.1	Discretisation de l'équation (4.2) . . . . .	67
4.4.2	Faisceau mince traversant un fantôme de Shepp et Logan . . . . .	68

---

4.5	Approximation classique rencontrée dans la littérature . . . . .	69
4.5.1	Présentation . . . . .	70
4.5.2	Evaluation de l'erreur commise par le non respect de la loi de Beer-Lambert . . . . .	70
4.5.3	Conclusion . . . . .	76
4.6	Approximation d'ordre 2 . . . . .	76
4.6.1	Analyse de l'équation obtenue . . . . .	77
4.7	Cas d'un milieu décomposé sur une base de pixels gaussiens . . . . .	77
4.7.1	Développement limité . . . . .	77
4.7.2	Formulation vectorielle . . . . .	78
4.7.3	Vérification des hypothèses réalisées lors de la construction de ce nouveau modèle . . . . .	79
4.7.4	Méthode de calcul . . . . .	80
4.7.5	Atténuation subie par une fonction de base . . . . .	80
4.8	Comparaison des modèles . . . . .	84
4.8.1	résultats . . . . .	84
4.8.2	Analyse des résultats . . . . .	86
4.9	Conclusion . . . . .	87
	<b>Bibliographie</b>	<b>92</b>



# Notations

$\mu$  : Vecteur des coefficients d'atténuation à reconstruire

$H$  : Matrice de projection

$N_t$  : Nombre de détecteurs

$N_\theta$  : Nombre d'angles de mesure

$c$  : Largeur d'un détecteur

$FWHM$  : Largeur à mi-hauteur d'une fonction gaussienne

$\Delta$  : Pas d'échantillonnage de la grille

$J_1(\mu)$  : Critère d'adéquation aux données

$J_2(\mu)$  : Terme de pénalisation



# Introduction

Ce travail a été réalisé sur les sites de l'Institut de Recherche en Communication et Cybernétique de Nantes (IRCCYN) et de l'Université Polytechnique de Montréal. J'ai travaillé sous la tutelle de M. Jérôme Idier, M. Saïd Moussaoui et M. Yves Goussard.

Notre objectif est de proposer une amélioration du modèle de projections utilisé en tomographie à rayons X. Nous souhaitons intégrer au modèle habituel une prise en compte de la taille des détecteurs. Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés à une modification de la base sur laquelle repose la discrétisation du milieu bidimensionnel. Puis nous avons évalué la validité d'un modèle couramment utilisé pour tenir compte de la taille des détecteurs. Enfin, nous avons proposé un nouveau modèle créé à partir d'une discrétisation du milieu sur une base de pixels gaussiens.

Ce rapport est divisé en 4 chapitres. Le premier chapitre fournit une introduction au principe de la tomographie à rayons X. La formulation du problème direct ainsi que les différentes méthodes de reconstruction de l'objet sont présentées. Le chapitre 2 constitue un résumé de l'étude bibliographique menée en début de stage. Nous y comparons les différentes bases employées pour discrétiser un objet 2D dans le cadre de la tomographie. Le chapitre 3 se focalise sur la base de pixels gaussiens. Il présente une méthode de calcul des coefficients de la décomposition puis évalue selon différents critères cette base de représentation. Enfin, le chapitre 4 aborde le problème de la modélisation de la taille des détecteurs. Nous nous interrogerons sur les modifications à apporter dans la formulation du problème direct, en tirant partie de la nouvelle base de discrétisation.



# Chapitre 1

## La tomographie

### 1.1 Présentation générale

La tomographie est une technique permettant l'acquisition d'informations et la reconstruction de sections planes d'objets ou d'organes. Le principe de la tomographie est étendu à différents phénomènes physiques tels que les rayons X, la résonance magnétique nucléaire (IRM), l'émission radioactive (Tomographie d'émission à un seul photon (SPECT) ou Tomographie à émission de positons (TEP))... Quel que soit le rayonnement utilisé, les systèmes de tomographie assistée par ordinateur ont en commun le principe suivant :

- acquisition des informations indirectes de l'objet sous différentes incidences (projections sur une coupe) par le dispositif d'acquisition ;
- détermination de l'image en tant que solution d'un problème inverse. Dans les différents cas, on reconstruit l'image d'un paramètre lié au rayonnement ou au principe physique utilisé.

Les systèmes tomographiques habituels permettent d'obtenir implicitement des images 3D en empilant une série de coupes parallèles (une quarantaine par exemple), on peut ainsi obtenir une représentation 3D de l'objet. Il existe cependant des techniques permettant de réaliser de façon explicite de la tomographie tridimensionnelle. On peut par exemple citer les systèmes de tomographie X utilisant une source conique de rayons X qui est déplacée autour de l'objet. Pour chaque position de la source, on acquiert une radiographie X qui correspond à une projection 2D de l'image 3D à reconstruire. En déplaçant le système source-détecteur on obtient un ensemble de projections, sous différents angles de vue, à partir desquelles la reconstruction doit être effectuée.

### 1.2 Le principe physique

#### 1.2.1 Les rayons X

Les rayons X sont des ondes électromagnétiques, constituées de photons. Chaque photon possède une énergie  $E$  inversement proportionnelle à sa longueur d'onde :

$$E = \frac{hc}{\lambda} = h\nu$$

avec  $h = 6.6261 \times 10^{-34}$  Js, la constante de Planck ;  $c = 3 \times 10^8$  m/s, la vitesse de la lumière ;  $\lambda$  la longueur d'onde en m ; et  $\nu$  la fréquence en  $s^{-1}$ . La longueur d'onde des rayons X est comprise entre  $10^{-8}$  m et  $10^{-12}$  m. Les photons ont donc une énergie comprise entre 0.1 keV et 1000 keV. Dans les tomographes, l'énergie des photons est comprise entre 30 et 140 keV.

### 1.2.2 Génération des rayons X

Les rayons sont générés par un tube à rayon X. Il est constitué de deux électrodes placées sous vide dans une enveloppe en verre résistant à la chaleur. La cathode, chauffée par passage d'un courant électrique, émet des électrons qui sont accélérés vers l'anode par une différence de potentiel  $U$  pouvant aller de 20 à 150 kV. Le courant résultant est de l'ordre de 100 mA. Le mode principal de formation des rayons X est l'émission générale (ou Bremsstrahlung). Elle se produit lorsque l'électron passe à proximité du noyau et se trouve attiré par sa charge. L'électron est alors dévié, ralenti, et l'énergie perdue est émise sous forme de photons X. Cette énergie est bornée par :

$$E \leq E_{max} = qU$$

où  $q$  est la charge électrique d'un électron.

### 1.2.3 Intéraction des rayons X avec la matière

Les rayons X peuvent interagir avec la matière de différentes façons :

- Lorsqu'un atome est frappé par un photon d'énergie  $h\nu$  supérieure à l'énergie de liaison, un électron est émis. L'électron libre est appelé photo-électron. Il sera absorbé par le matériau. Il s'agit de l'effet photoélectrique.
- Un photon peut aussi interagir avec un électron libre. On parle alors d'effet Compton. L'électron reçoit une partie de l'énergie du photon incident et est éjecté avec un angle  $\phi$ . Un photon doté de l'énergie restante est émis dans une direction faisant un angle  $\Theta$  avec la trajectoire du photon incident. (voir figure 1.1)

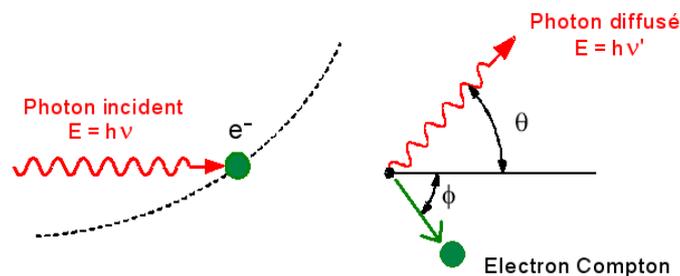


FIG. 1.1 – Effet Compton

Il existe d'autres types d'interaction rayonnement-matière :

- La diffusion cohérente
- La production de paires
- La photo-désintégration

Ces interactions ont un rôle négligeable, en particulier pour les gammes d'énergie utilisées en tomographie.

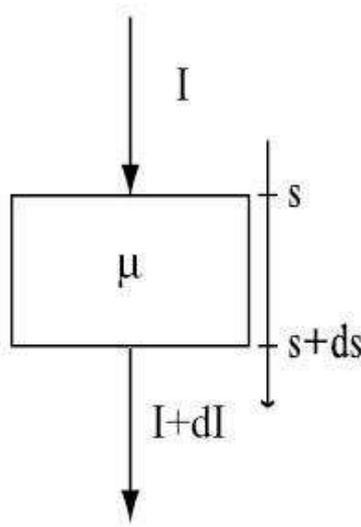


FIG. 1.2 – Faisceau de rayons X traversant un matériau mince de coefficient d'atténuation linéaire  $\mu$  ([14])

On considère un faisceau de rayons X traversant une couche d'épaisseur  $ds$ . Ce faisceau est atténué par les processus décrit ci-dessus. L'intensité du faisceau entrant est  $I$  et celle du faisceau incident est  $I + dI$ . L'intensité est définie comme l'énergie transmise par unité de temps et d'espace, elle est proportionnelle au nombre de photons. On définit le coefficient d'atténuation linéaire  $\mu$  par :

$$\mu = -\frac{1}{I} \frac{dI}{ds}$$

soit la fraction de faisceau atténuée par unité de longueur. On en déduit la loi de Beer-Lambert :

$$I(s) = I(0) \exp\left(-\int_0^s \mu(s') \cdot ds'\right)$$

Cette équation fournit un modèle d'observation qui sert de base à l'élaboration des méthodes de reconstruction. Bien que les interactions individuelles soient de natures statistiques, l'intensité macroscopique du rayon suit une loi exponentielle. Un milieu très absorbant aura un coefficient d'atténuation  $\mu$  élevé et le faisceau émergeant du milieu contiendra peu de photons.

Cette modélisation adopte un point de vue déterministe et suppose que :

- les rayons X émis sont infiniment fins et monochromatiques ;
- le nombre de photons émis par la source pour un rayon est déterminé et égal à  $N_0$  ;
- les détecteurs sont parfaits et détectent tout photon les atteignant.

#### 1.2.4 La largeur des détecteurs

Nous souhaitons adopter une modélisation plus réaliste qui prendrait en compte la largeur des détecteurs. Cela revient à considérer qu'un détecteur reçoit un faisceau de rayons X d'épaisseur égale à sa largeur.

Soit un faisceau de rayons X d'épaisseur  $c$  d'intensité uniforme traversant  $\mu$  le long du segment  $[a, b]$ . L'intensité du faisceau émergent est :

$$I = I_0 \frac{1}{c} \int_{t-\frac{c}{2}}^{t+\frac{c}{2}} e^{-\int_a^b \mu(s) ds} dl$$

### 1.3 Acquisition des données

Considérons un système tomographique 2D à faisceaux parallèles.  $\mu(x, y)$  représente la distribution des coefficients d'atténuation dans le plan  $xy$  (voir figure 1.3). L'objet est orienté suivant l'axe  $x$  et on suppose que  $\mu(x, y)$  est nul en dehors d'un champ cylindrique de diamètre  $D$ . Le faisceau fait un angle  $\theta$  avec l'axe  $y$ . L'intensité du faisceau non atténué est  $I_0$ . On définit un nouveau système de coordonnées  $(t, s)$  par rotation d'angle  $\theta$  de  $(x, y)$  :

$$\begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix}$$

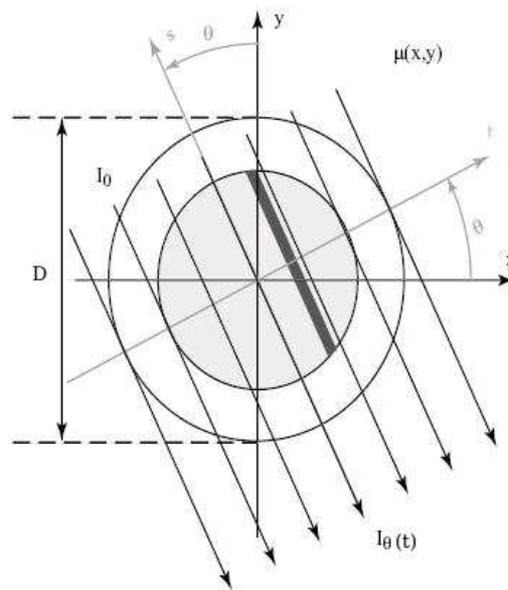


FIG. 1.3 – Système de coordonnées de la géométrie à faisceaux parallèles ([14])

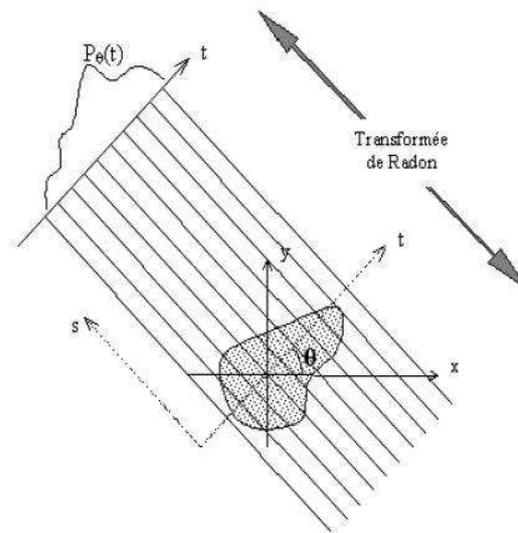


FIG. 1.4 – Projection d'une fonction  $\mu(x, y)$  le long de l'angle  $\theta$

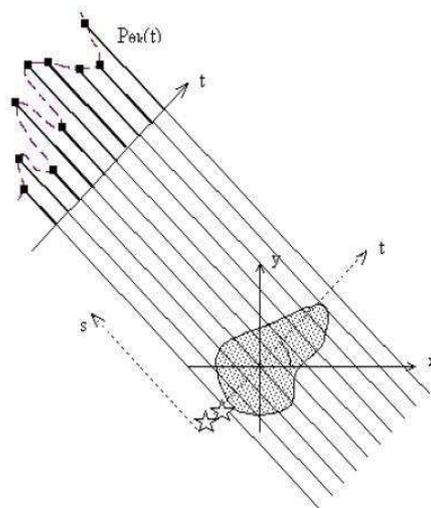


FIG. 1.5 – Caractère discret des projections



FIG. 1.6 – Fantôme de Shepp et Logan

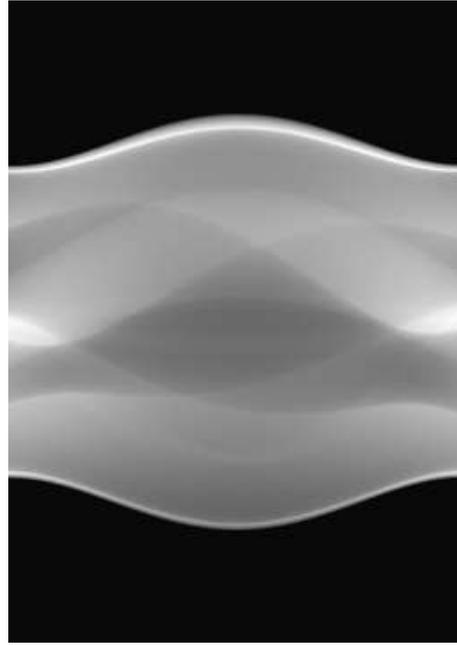


FIG. 1.7 – Sinogramme du fantôme de Shepp et Logan

Pour un angle fixé, le profil d'intensité mesuré en fonction de  $t$  est donné par :

$$I(t, \theta) = I_0 e^{-\int_{L_{t,\theta}} \mu(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) ds}$$

$L_{t,\theta}$  est la droite qui fait un angle  $\theta$  avec l'axe  $y$  située à une distance  $t$  de l'origine. Chaque profil d'intensité est transformé en un profil d'atténuation :

$$P(t, \theta) = -\ln \frac{I(t, \theta)}{I_0} = \int_{L_{t,\theta}} \mu(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) ds$$

$P(t, \theta)$  est la projection de la fonction  $\mu(x, y)$  le long de l'angle  $\theta$  (Fig. 1.4).  $P(t, \theta)$  est nulle pour  $|t| \geq D/2$ .

Dans le cas de la géométrie à faisceaux parallèles, il est suffisant de mesurer  $P(t, \theta)$  pour  $\theta$  compris entre 0 et  $\pi$ . L'ensemble des projections  $P(t, \theta)$  regroupé dans un tableau de données 2D est appelé un sinogramme (Fig. 1.7). En mathématiques, la transformation d'une fonction  $f(x, y)$  en  $P(t, \theta)$  est appelée transformée de Radon :

$$P(t, \theta) = \mathcal{R}f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) ds$$

La transformée de Radon a les propriétés suivantes :

- $P(t, \theta)$  est périodique en  $\theta$  de période  $2\pi$

$$P(t, \theta) = P(t, \theta + 2\pi)$$

- $P(t, \theta)$  est symétrique en  $\theta$  de période  $\pi$

$$P(t, \theta) = P(-t, \theta \pm \pi)$$

Jusqu'à présent, nous avons considéré que les données  $P(t, \theta)$  étaient disponibles pour tous les angles  $\theta$  et toutes les distances  $t$ . En pratique, on a accès uniquement à un nombre fini  $N_\theta$  de projections et à un nombre fini  $N_t$  de détecteurs (par exemple 1056 projections et 768 détecteurs) (Fig. 1.5). Le sinogramme est alors une matrice  $P[n_t, n_\theta] = P[n_t \Delta t, n_\theta \Delta \theta]$  à  $N_\theta$  lignes et  $N_t$  colonnes.  $\Delta t$  est la distance entre deux centres de détecteurs et  $\Delta \theta$  est l'intervalle angulaire entre deux projections consécutives.

## 1.4 La reconstruction

### 1.4.1 Introduction

Connaissant le nombre de photons émis par la source, le mode de propagation des rayons X dans la matière et le nombre de photons détectés par les capteurs, la reconstruction tomographique consiste à estimer le corps scanné. Deux approches sont alors possibles :

- la première s'appuie sur une expression analytique de l'estimée de l'objet scanné. Cette démarche conduit aux algorithmes mis en oeuvre dans les tomographes médicaux : les algorithmes de type rétro-projection filtrée
- la seconde approche s'appuie sur une décomposition préalable de l'objet à imager sur une base fini de fonctions appropriées (une base indicatrice de pixels par exemple). L'inversion numérique a ensuite lieu pour reconstruire cette approximation. Cette démarche conduit aux algorithmes de reconstruction itératifs.

Une classification de ces méthodes est présentée dans le tableau 1.1 (inspiré de [4]).

Analytique	Itératif		
FBP	Algébrique	Statistique	
	ART [9]	Weighted Least Squares	Likelihood ( ex : Poisson)
		Gradient conjugué L-BFGS [2]	EM [16] OSEM [10]

TAB. 1.1 – Classification des méthodes de reconstruction

Ces méthodes supposent que les rayons X émis sont infiniment fins et monochromatiques. Nous nous intéresserons aux méthodes de reconstruction itératives.

### 1.4.2 Le modèle usuel en reconstruction itérative

Le point de départ de ces méthodes est une représentation discrète de l'image et des mesures. Une image, c'est à dire un milieu  $\mu(x, y)$  est écrit sous la forme d'une combinaison linéaire finie de fonctions de base  $b_n(x, y)$  :

$$\mu(x, y) = \sum_{n=1}^N \mu_n b_n(x, y)$$

Nous noterons  $\vec{\mu}$  l'ensemble des valeurs des pixels  $\mu_n, n = 1 \dots N$ . De plus, le sinogramme  $P[n_t, n_\theta]$  sera noté sous forme vectorielle  $\vec{P}$  avec  $P_i, i = 1 \dots N_\theta \cdot N_t$ . On notera enfin  $M = N_\theta \cdot N_t$ .

Le modèle s'écrit alors (Démonstration à la section 2.1.1) :

$$P_m = \sum_{n=1}^N h_{mn} \mu_n$$

$h_{mn}$  est appelé coefficient de pondération. On a donc un modèle de génération des données linéaire :

$$P = H\mu$$

### 1.4.3 Présentation du critère à minimiser

#### 1.4.3.1 Critère des moindres carrés

Le critère des moindres carrés est basé sur une hypothèse de linéarité du problème :

$$P = H\mu + \epsilon$$

Le terme  $\epsilon$  traduit les erreurs de modélisation et les erreurs de mesures. Aucune hypothèse probabiliste n'est faite sur les erreurs résiduelles qui constituent  $M$  inconnues supplémentaires du problème. La matrice d'observation  $H$  est connue. L'estimation  $\hat{\mu}$  retenue est celle qui minimise un critère de fidélité aux données, correspondant à la somme des carrés des erreurs résiduelles ( carré de la norme 2), appelé critère des moindres carrés :

$$J_1^{MC} = \|P - H\mu\|_2^2 = (P - H\mu)^T (P - H\mu)$$

Le problème d'estimation au sens des moindres carrés s'écrit donc :

$$\hat{\mu} = \text{Argmin} \|P - H\mu\|_2^2$$

Le gradient du critère des moindres carrés s'écrit :

$$\nabla J_1^{MC}(\mu) = -2H^T(\epsilon^T \epsilon)$$

avec  $\epsilon = P - H\mu$

#### 1.4.3.2 Critère basé sur un modèle probabiliste de la génération des données

Un autre critère utilisé est basé sur un modèle probabiliste de la génération des données. On pose que les observations  $P_m$  sont des variables aléatoires indépendantes distribuées par la loi de poisson :

$$P_m \sim \text{Poisson}\left(\sum_n h_{mn} \mu_n\right)$$

On note  $\bar{P}_m = (H\mu)_m = \sum_n h_{mn} \mu_n$ . On cherche à maximiser la probabilité  $p(P/\mu)$  :

$$p(P/\mu) = \prod_{m=1}^M \frac{\bar{P}_m^{P_m} e^{-\bar{P}_m}}{P_m!}$$

Cela revient à maximiser la log-vraisemblance :

$$\log p(P/\mu) = \sum_{m=1}^M (P_m \log \bar{P}_m - \bar{P}_m)$$

En notant  $J_1^P(\mu) = -\sum_{m=1}^M (P_m \log \bar{P}_m - \bar{P}_m)$ ,

$$\hat{\mu} = \text{Argmin} J_1^P(\mu)$$

### 1.4.3.3 Introduction d'un critère de pénalisation

Les estimateurs construits à partir des critères précédents ne sont pas satisfaisants. Le mauvais conditionnement de la matrice  $H$  a pour effet d'amplifier les erreurs affectant les données  $P$ .

Afin d'améliorer le conditionnement du problème, le critère est régularisé :

$$J(\mu) = J_1(\mu) + \lambda J_2(\mu)$$

Le second terme  $J_2(\mu)$  permet de renforcer certaines propriétés a priori de la solution. Le paramètre  $\lambda$  permet de régler le compromis entre l'adéquation aux données et la fidélité aux connaissances a priori. Le terme de pénalisation employé est de la forme :

$$J_2(\mu) = \sum_{s,r} \phi(w_{s,r}(\mu_s - \mu_r))$$

en posant  $w(s,r) = 1$  si les pixels  $s$  et  $r$  sont voisins verticaux ou horizontaux,  $w(s,r) = \sqrt{2}$  si ils sont voisins diagonaux et  $w(s,r) = 0$  sinon (pixels non voisins). Le critère peut s'écrire sous la forme suivante :

$$J_2(\mu) = \sum_v \phi(d_v^T \mu)$$

en notant  $d_v$  la ligne  $v$  d'une matrice  $D$ . La matrice  $D$  est composée de 4 sous-matrices correspondant respectivement aux différences entre pixels voisins verticaux, horizontaux et diagonaux :

$$D = \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_{d_1} \\ D_{d_2} \end{bmatrix}$$

Le choix de la fonction de régularisation  $\phi$  dépend des propriétés que l'on souhaite imposer à la solution à partir des connaissances physiques a priori. Nous choisissons  $\phi(u) = \sqrt{u^2 + \delta^2} - u$ . Cette fonction est dite 'L1 - L2'. C'est à dire qu'elle est proche d'une fonction quadratique autour de  $u = 0$  mais proche d'une fonction linéaire pour  $u \gg 1$ . Elle permet de privilégier les zones homogènes tout en évitant un lissage trop important des zones de contours.

La  $n$ -ème composante du gradient de  $J_2(\mu)$  peut s'exprimer en fonction de  $\phi'$  et  $D$  :

$$\frac{\partial}{\partial \mu_n} J_2(\mu) = \sum_v \phi'(d_v^T \mu) \times \frac{\partial}{\partial \mu_n} d_v^T \mu$$

Or  $\frac{\partial}{\partial \mu_n} d_v^T \mu = D_{vn}$ , d'où :

$$\frac{\partial}{\partial \mu_n} J_2(\mu) = \sum_v \phi'(d_v^T \mu) \cdot D_{vn}$$

#### 1.4.3.4 Contrainte de positivité

Il est possible de s'assurer de la positivité des  $\mu$  en effectuant un changement de variable. On pose  $\mu = \zeta(\nu)$  où  $\zeta$  est une fonction  $\mathcal{C}^1$  définie de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^+$ , inversible et convexe. Cette méthode ainsi que les modifications à apporter au gradient du critère est présentée dans [15]. La fonction  $\zeta$  utilisée sera :

$$\zeta(\nu) = \sqrt{\mu^2 + \delta_p^2} - \delta_p$$

avec

$$\delta_p^2 = 10$$

(proposition de [15])

#### 1.4.3.5 Algorithmes utilisés

Pour minimiser  $J_1^P(\mu)$ , un algorithme classique est l'algorithme EM, détaillé dans [16]. Les travaux [6] et [17] présentent des méthodes de minimisation de  $J_1^P(\mu) + \lambda J_2(\mu)$ . Pour nos tests numériques de reconstruction, nous utiliserons un algorithme de type BFGS minimisant le critère  $J_1^{MC}(\mu) + \lambda J_2(\mu)$  proposé dans [2].

## 1.5 Problématiques

Notre étude a pour objectif d'apporter des éléments de réponse aux interrogations suivantes :

Dans le cas où la base choisie n'est plus la base des pixels carrés :

- Comment calculer les  $\mu_n$  ?
- Comment est modifiée la matrice  $H$  ?
- Comment adapter les algorithmes d'optimisation à ce modèle ?

Dans le cas où l'on considère que la taille des détecteurs est non nulle :

- Quelle est l'erreur commise si l'on conserve le modèle détecteur mince ?
- Comment modifier le modèle de construction des données ?
- Comment adapter les algorithmes d'optimisation à ce modèle ?

## Chapitre 2

# Les bases de fonctions utilisées dans le cadre de la tomographie

Nous avons vu dans la partie précédente que les méthodes de reconstruction itératives utilisaient une description discrète du milieu  $\mu(x, y)$  sous la forme d'une combinaison linéaire finie de fonctions de base  $b_n(x, y)$ . Habituellement, on considère que le milieu est discrétisé sur un système de pixels carrés homogènes. Les travaux [7] et [12] font remarquer que les pixels sont une base d'échantillonnage particulière et proposent des alternatives à cette base usuelle. Ce chapitre a pour objectif de présenter les différentes bases de décomposition rencontrées dans la littérature. Sauf contre indication, nous ferons l'hypothèse dans toute cette partie que les rayons sont de taille très mince devant celle du maillage du milieu.

### 2.1 Généralisation du problème direct dans le cas d'une base de décomposition quelconque

Nous nous plaçons ici dans le cas bidimensionnel. Le milieu étudié est caractérisé par la fonction d'atténuation  $\mu(x, y)$ . La discrétisation du milieu peut être vue de manière générale comme une décomposition sur une base de fonctions :

$$\mu(x, y) = \sum_{n=1}^N \mu_n b_n(x, y)$$

Par la suite, nous supposerons que le milieu est discrétisé sur une grille de taille  $I \times J = N$  et la décomposition sur la base sera notée :

$$\mu(x, y) = \sum_{i,j=1}^{I \times J} \mu_{ij} b_{ij}(x, y)$$

De plus, on suppose que les fonctions de bases se déduisent les unes des autres par décalages réguliers en  $x$  et  $y$  :

$$b_{ij}(x, y) = b(x - (i - 1)\Delta_x, y - (j - 1)\Delta_y) \quad ; \quad 1 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq J$$

L'espace des fonctions de base en  $x$  et  $y$  est supposé régulier :

$$\Delta_x = \Delta_y = \Delta$$

On note enfin :

$$x_i = (i - 1)\Delta \quad \text{et} \quad y_j = y - (j - 1)\Delta \quad ; \quad 1 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq J$$

$\Delta$  correspond au décalage (horizontal ou vertical) entre deux points voisins de l'espace 2D. (Voir figure 2.1)

Considérons un faisceau mince de rayons X traversant un milieu caractérisé par son atténuation  $\mu(x, y)$ . Le rayon entre dans le milieu avec une intensité  $I_0$ . L'intensité du faisceau émergeant du milieu atténuant est donnée par la loi de Beer-Lambert présentée dans le chapitre précédent :

$$I = I_0 e^{-\int_L \mu(x,y) ds}$$

$L$  est la droite supportant le faisceau. (Voir figure 2.2)

Pour un milieu discrétisé sur une base de fonctions  $b_{ij}(x, y)$ , la loi d'atténuation du faisceau mince devient :

$$I = I_0 \exp\left(-\int_L \sum_{ij} \mu_{ij} b(x - x_i, y - y_j) ds\right)$$

Lorsque le pas de discrétisation tend vers 0, on retrouve la loi d'atténuation dans le cas d'un milieu continu.

Sous les hypothèses :

- $b$  est continue et nulle à l'extérieur d'un compact de  $C = [0, 1]^2$
- $\sum_{j \in \|-1+j_0; 1+j_0\|} \sum_{i \in \|-1+i_0; 1+i_0\|} b(x_0 - x_i, y_0 - y_j) = 1$
- $\mu$  est une fonction continue de  $C$
- Le maillage de  $C$  a une finesse qui tend vers 0, i.e  $\forall i, |x_{i+1}^{(N)} - x_i^{(N)}| \rightarrow 0$  pour  $N \rightarrow \infty$

On démontre que :

$$\sum_{ij} \mu_{ij} w_{ij} = -\int_L \sum_{ij} \mu_{ij} b(x_0 - x_i, y_0 - y_j) ds \rightarrow \int_L \mu ds \quad \text{pour} \quad N \rightarrow \infty$$

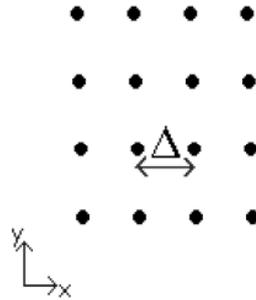


FIG. 2.1 – Echantillonnage de l'espace 2D. Les fonctions de bases  $b_{ij}(x, y)$  sont centrées sur les points de la grille  $x_i$  et  $y_j$ . Elles se déduisent par décalage de la fonction  $b(x, y)$  centrée en  $(0, 0)$

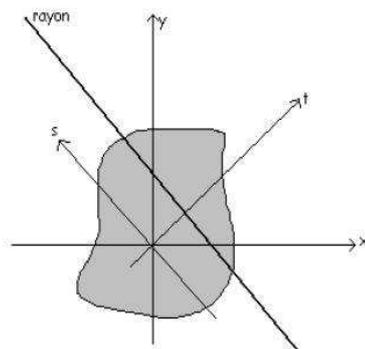


FIG. 2.2 – Le faisceau mince de rayons X traverse le milieu 2D  $\mu(x, y)$  en suivant la direction  $Os$ .

### 2.1.1 Calcul des projections

Considérons un faisceau mince de rayons  $X$  faisant un angle  $\theta$  avec l'axe  $y$ . L'intensité du faisceau non atténué est  $I_0$ .  $I(t, \theta)$  est l'intensité mesurée au détecteur de paramètres  $(t, \theta)$ . On appelle  $P(t, \theta)$  la projection de la fonction  $\mu(x, y)$  le long de la droite supportant le faisceau.

$$P(t, \theta) = -\ln \frac{I(t, \theta)}{I_0} = \int_{L_{t, \theta}} \mu(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) ds$$

Dans le cas d'une image discrétisée, l'intégrale est approchée par une somme pondérée des coefficients  $\mu_{ij}$  :

$$P(t, \theta) = \int_{L_{t, \theta}} \sum_{ij} \mu_{ij} b_{ij}(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) ds$$

Soit :

$$P(t, \theta) = \sum_{ij} \mu_{ij} \int_{L_{t, \theta}} b_{ij}(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) ds = \sum_{ij} \mu_{ij} w_{ij}$$

Pour un faisceau caractérisé par son inclinaison  $\theta$  et sa distance à l'origine  $t$ ,

$$w_{ij} = \int_{L_{t, \theta}} b_{ij}(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) ds$$

On a :

$$b_{ij}(x, y) = b(x - x_i, y - y_j)$$

Nous nous plaçons dans le système de coordonnées défini au chapitre précédent :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix}$$

alors on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{ij} \\ s_{ij} \end{bmatrix}$$

et :

$$w_{ij} = \int_{L_{t, \theta}} b((t - t_{ij}) \cos \theta - (s - s_{ij}) \sin \theta, (t - t_{ij}) \sin \theta + (s - s_{ij}) \cos \theta) ds$$

On note comme indiqué en figure 2.3 :

$$S = s - s_{ij} \quad ; \quad d_{ij} = t - t_{ij} \quad \text{d'où} \quad d_{ij} = t - y_j \sin(\theta) - x_i \sin(\theta)$$

Alors :

$$w_{ij} = \int_{L_{t, \theta}} b(d_{ij} \cos \theta - S \sin \theta, d_{ij} \sin \theta + S \cos \theta) dS$$

**Notations :**

- $\mathbf{P} = [P(t, \theta)]$  vecteur de taille  $M$  regroupant les valeurs  $-\ln \frac{I(\theta, t)}{I_0}$
- $\boldsymbol{\mu} = [\mu_{ij}]$  vecteur de taille  $N^2$  regroupant les coefficients de la décomposition de  $\mu(x, y)$  sur la base  $b$

–  $H = [h(t, \theta)]$  matrice de taille  $M \times N^2$  regroupant les vecteurs  $h = [w_{ij}]$  de taille  $N^2$

Les coefficients  $w_{ij}$  appelés coefficients de pondération sont stockés dans une matrice  $H$  appelée matrice de projection.  $H$  est de taille  $M \times N$ . Une ligne de  $H$  correspond à un rayon donné. Dans le cas de mesures non bruitées,

$$\mathbf{P} = H\mu$$

Il existe de nombreuses possibilités pour le choix de la fonction  $b$ . Nous nous restreindrons dans cette étude aux bases à support limité. Nous étudierons deux grandes familles de bases locales :

- fonctions séparables
- fonctions à symétrie circulaire

Pour d'autres types de bases (notamment les bases non locales), nous recommandons de se référer à [7] et [8].

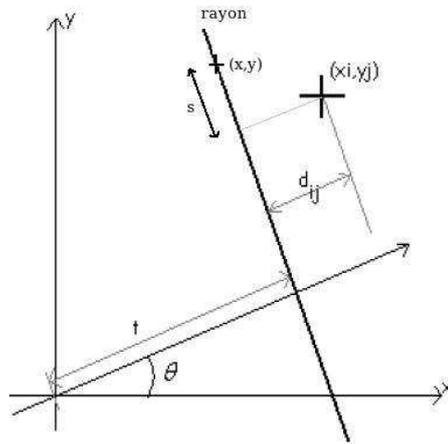


FIG. 2.3 – Un point sur la droite  $L_{t, \theta}$  supportant le faisceau est caractérisé par sa cote  $S$  ( $S$  décrit  $\mathbb{R}$ ).  $d_{ij}$  correspond à la distance normale entre le faisceau et le centre du pixel  $i, j$ .

## 2.2 Fonctions séparables

Introduites par [7], ces fonctions sont une généralisation de la discrétisation de l'image sur des pixels carrés uniformes. Les fonctions sont dites séparables car elles s'expriment sous la forme :

$$b(x, y) = \Phi_x(x)\Phi_y(y)$$

Nous nous plaçons dans le cas où les directions  $x$  et  $y$  ont des rôles équivalents. On choisit donc  $\Phi_x = \Phi_y = \Phi$  et on suppose que les fonctions  $b$  sont à support carré limité. Les fonctions de bases  $\Phi_i(x)$  et  $\Phi_j(y)$  se déduisent de  $\Phi$  par décalage respectif sur  $x$  et  $y$  :

$$\Phi_i(x) = \Phi(x - (i - 1)\Delta) = \Phi(x - x_i)$$

Soit le pixel  $(i, j)$  dont le centre  $(x_i, y_j)$  est distant de  $d_{ij}$  d'un rayon. On suppose sans perte de généralité que le pixel est situé en  $(0, 0)$  (Sinon, il suffit de définir un nouveau repère centré en  $(x_i, y_j)$ ) (Fig. 2.4)

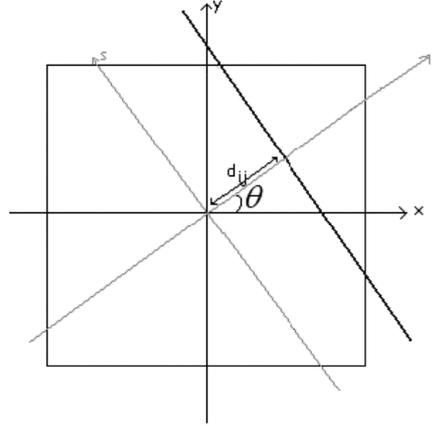


FIG. 2.4 – On se place dans le repère centré en  $(x_i, y_j)$ . La base  $b$  a un support carré

Alors  $d_{ij} = t$  et  $S = s$ . Le coefficient de pondération  $w_{ij}$  est exprimé par :

$$w_{ij}(t, \theta) = \int_{L_{t, \theta}} \Phi(t \cos \theta - s \sin \theta) \Phi(t \sin \theta - s \cos \theta) ds$$

### 2.2.1 Méthode de calcul des $w_{ij}$ dans le cas d'une base séparable quelconque ([7])

On note  $2a$  la largeur du support de la fonction  $\Phi$ . En pratique, on a souvent  $2a = \Delta$  afin que les fonctions de base ne se recouvrent pas. La méthode proposée par [7] repose sur les constatations suivantes :

- $w_{ij}$  s'annule quand  $t$  sort de l'intervalle  $[-R_\theta, R_\theta]$  avec  $R_\theta = a(|\cos \theta| + |\sin \theta|)$  ;
- $w_{ij}(-\theta) = w_{ij}(\theta)$  et  $w_{ij}(-t) = w_{ij}(t)$  ;
- $w_{ij}(\frac{\pi}{4} + \theta) = w_{ij}(\frac{\pi}{4} - \theta)$ .

Il suffit donc de calculer  $w_{ij}$  pour  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$  et  $0 \leq t \leq R_\theta$ . Et dans ce cas, les projections sont calculées selon :

$$w_{ij}(t, \theta) = \int_{s_1}^{s_2} \Phi(t \cos \theta - s \sin \theta) \Phi(t \sin \theta - s \cos \theta) ds$$

où les bornes de l'intégrale sont données par :

$$\begin{cases} s_1 = & \max\left(\frac{-a+t \sin \theta}{\cos \theta}, \frac{-a+t \cos \theta}{\sin \theta}\right) & \text{si } \theta \neq 0 \\ & -a & \text{si } \theta = 0 \\ s_2 = & \frac{a-t \sin \theta}{\cos \theta} \end{cases}$$

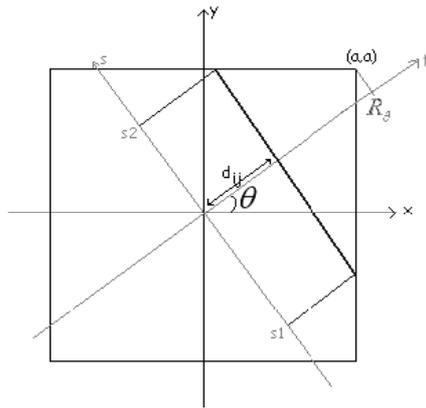
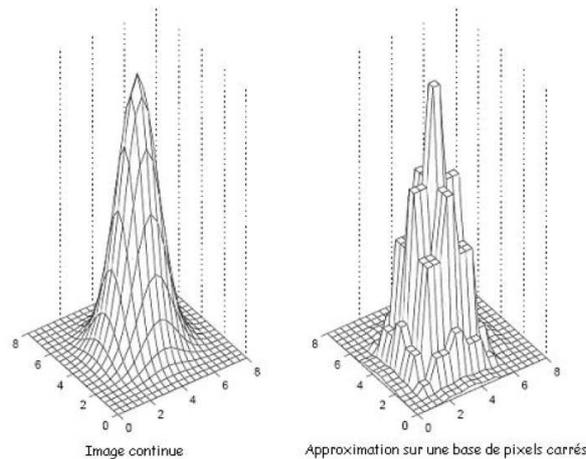


FIG. 2.5 – Description des notations utilisées par [7]

### 2.2.2 Discrétisation sur une base de pixels uniformes

Une représentation usuelle d'un milieu 2D consiste à choisir une base de pixels carrés homogènes. Une telle base correspond à effectuer une interpolation par plus proches voisins de  $\mu(x, y)$  comme illustré en figure (2.6).

FIG. 2.6 – Représentation d'un milieu continue  $\mu(x, y)$  sur une base de pixels carrés

En choisissant la méthode de calcul décrite ci-dessus, on a :

$$w_{ij} = \int_{s_1}^{s_2} ds = s_2 - s_1$$

Le coefficient de pondération correspond à la longueur de la corde qui traverse le pixel carré (Fig. 2.7)

$$w_{ij} = \begin{cases} \frac{a}{\cos \theta} & \text{si } t \leq a(\cos \theta - \sin \theta) \\ \frac{R_\theta - t}{\sin \theta \cos \theta} & \text{si } a(\cos \theta - \sin \theta) \leq t \leq R_\theta \\ 0 & \text{si } t > R_\theta \end{cases}$$

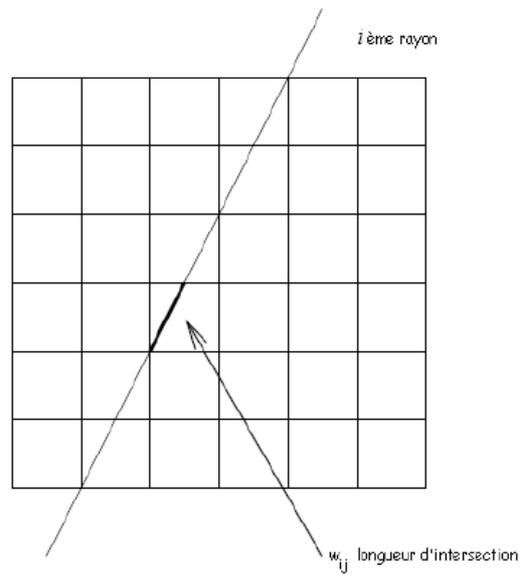


FIG. 2.7 – Pondération classique par la longueur d'intersection entre le pixel et le rayon

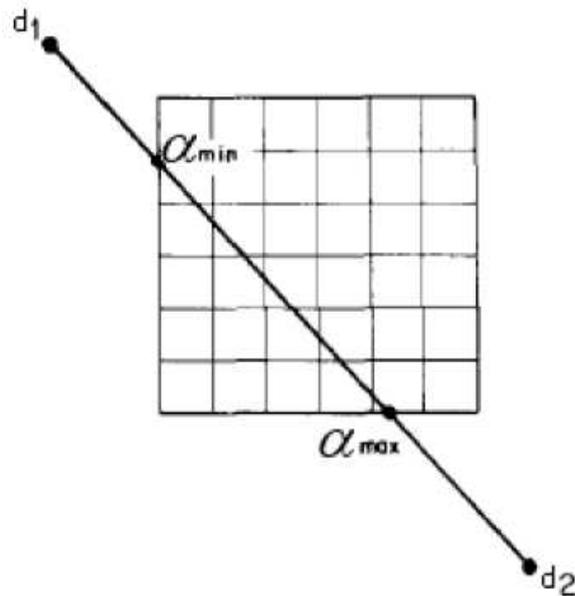


FIG. 2.8 – Méthode de calcul des coefficients proposée par Siddon ([20])

Cette méthode de calcul est coûteuse puisque le calcul précédent doit être réalisé pour tous les rayons et tous les pixels. En réalité, pour un rayon donné, de nombreux  $w_{ij}$  sont nuls. Afin de réduire le temps de calcul de  $H$ , Siddon ([20]) propose de calculer uniquement les  $w_{ij}$  situés sur le "chemin" du rayon concerné. Pour cela, le rayon est défini de façon paramétrique : On note  $d_1 = (d_{x1}, d_{y1}), d_2 = (d_{x2}, d_{y2})$  les points correspondant aux extrémités du rayon considéré (Fig. 2.8). Un point du rayon peut être décrit par l'équation :

$$d(\alpha) = d_1 + \alpha(d_2 - d_1)$$

A partir des coordonnées des points  $d_1$  et  $d_2$ , on définit les paramètres  $\alpha_{min}, \alpha_{max}$  caractérisant les positions des points d'entrée et de sortie du rayon à travers l'image ainsi que  $i_{min}, i_{max}, j_{min}, j_{max}$  les indices des pixels contenant ces deux points. Enfin, à partir des points d'intersection entre le rayon et les plans délimitant les pixels, on définit un ensemble de paramètres  $\alpha$ . La longueur d'intersection entre le pixel  $m$  et le rayon de longueur  $d_{12}$  est :

$$l(m) = d_{12}(\alpha(m) - \alpha(m - 1)), m = 1 \dots n$$

$n$  est le nombre de pixels traversés par le rayon.

$$n = (i_{max} - i_{min} + 1) + (j_{max} - j_{min} + 1)$$

Cette méthode se généralise en 3D. Elle est de type "ray driven", en effet on remplit la matrice  $H$  par ligne, rayon par rayon. D'autres algorithmes permettent de réaliser le même calcul notamment ceux décrits dans [3] et [13].

### 2.2.3 Autres bases de fonctions séparables

Hanson ([7]) propose plusieurs alternatives possibles à la base de pixels carrés. Par exemple, il est possible de choisir des fonctions  $\Phi(x)$  de forme triangulaires ou polynomiales. Dans ce cas, le calcul des coefficients de  $H$  n'est pas trivial et Hanson propose d'évaluer les calculs d'intégrale à l'aide d'une discrétisation sous forme de somme. Les valeurs des intégrales sont alors stockées pour différentes valeurs discrètes de  $t$  et de  $\theta$ . Ensuite, pour un rayon donné,  $w$  est estimé par régression linéaire.

### 2.2.4 Conclusion

La base de pixels carrés est très couramment utilisée car elle correspond à une représentation intuitive d'un milieu 2D continu. De nombreux travaux ont été effectués ces 10 dernières années afin d'optimiser le calcul du remplissage de la matrice  $H$ . Les autres bases séparables ne présentent a priori pas d'intérêt particulier. Nous étudierons cependant de façon plus approfondie dans la section 2.4 le cas où la fonction  $\Phi(x)$  est une gaussienne.

## 2.3 Fonctions à symétrie circulaire

Les fonctions de bases présentées dans [12] sont un exemple de fonctions à symétrie circulaire. Elles vérifient :

$$b(x, y) = B(r) = B(\sqrt{x^2 + y^2});$$

Il suffit de définir la fonction  $1D$   $B$  pour créer la base de fonctions.

### 2.3.1 Méthode de calcul des $w_{ij}$ dans le cas d'une base à symétrie circulaire quelconque (Généralisation de [12])

Le coefficient de projection est vu comme la transformation d'Abel de la fonction  $B$  :

$$w_{ij}(d_{ij}) = \int_{\mathbb{R}} B(\sqrt{s^2 + d_{ij}^2}) ds$$

La fonction  $B$  est paire d'où :

$$w_{ij}(d_{ij}) = 2 \int_0^{\infty} B(\sqrt{s^2 + d_{ij}^2}) ds$$

Dans le cas où  $B$  est à support borné ( $B(r) = 0$  pour  $|r| > a$ ), on a :

$$w_{ij}(d_{ij}) = 2 \int_0^{\sqrt{a^2 - d_{ij}^2}} B(\sqrt{s^2 + d_{ij}^2}) ds$$

On effectue le changement de variable suivant :  $r^2 = s^2 + d_{ij}^2$  et on note dans la suite des calculs  $\delta = d_{ij}$ .

On a donc :

$$w(\delta) = 2 \int_{\delta}^{\infty} \frac{B(r)r dr}{\sqrt{r^2 - \delta^2}}$$

$w(\delta)$  est la transformée d'Abel de la fonction  $B(r)$ , on peut donc déduire :

$$B(r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^{\infty} \frac{dw}{d\delta} \frac{d\delta}{\sqrt{\delta^2 - r^2}}$$

$B(r)$	$w(x)$	Conditions
$\Pi_a(r)$	$2\sqrt{a^2 - x^2}$	$0 < x < a$
$(a^2 - r^2)^{-\frac{1}{2}}\Pi_a(r)$	$\pi$	$0 < x < a$
$\sqrt{a^2 - r^2}\Pi_a(r)$	$\frac{1}{2}\pi(a^2 - x^2)$	$0 < x < a$
$(a^2 - r^2)\Pi_a(r)$	$\frac{4}{3}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$	$0 < x < a$
$(a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}\Pi_a(r)$	$\frac{3}{8}\pi(a^2 - x^2)^2$	$0 < x < a$
$(a^2 - r^2)^2\Pi_a(r)$	$\frac{16}{15}(a^2 - x^2)^{\frac{5}{2}}$	$0 < x < a$
$(a - r)\Pi_a(r)$	$a\sqrt{a^2 - x^2} - x^2 \cosh^{-1}\left(\frac{a}{x}\right)$	
$\frac{1}{\pi} \cosh^{-1}\left(\frac{a}{r}\right)$	$a + x$	
$\delta(r - a)$	$\frac{2a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\Pi_a(x)$	
$e^{-r^2/\sigma^2}$	$\sigma\sqrt{\pi}e^{-x^2/\sigma^2}$	$\sigma > 0$
$r^2 e^{-r^2/\sigma^2}$	$\sigma(x^2 + \frac{1}{2}\sigma^2)\sqrt{\pi}e^{-x^2/\sigma^2}$	$\sigma > 0$
$\frac{e^{-r^2/\sigma^2}}{\sigma\sqrt{\pi}}(r^2 - \frac{1}{2}\sigma^2)$	$x^2 e^{-x^2/\sigma^2}$	$\sigma > 0$
$\frac{1}{b^2 + r^2}$	$\frac{\pi}{\sqrt{b^2 + x^2}}$	$b^2 + x^2 > 0$

TAB. 2.1 – Transformées d'Abel de fonctions classiques ([1])

en définissant

$$\Pi_a(x) \equiv \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Conséquences :**

- une base gaussienne correspond à une pondération gaussienne
- il existe une base correspondant à une pondération affine mais elle n'est pas définie en  $r = 0$
- il existe une base correspondant à une pondération uniforme

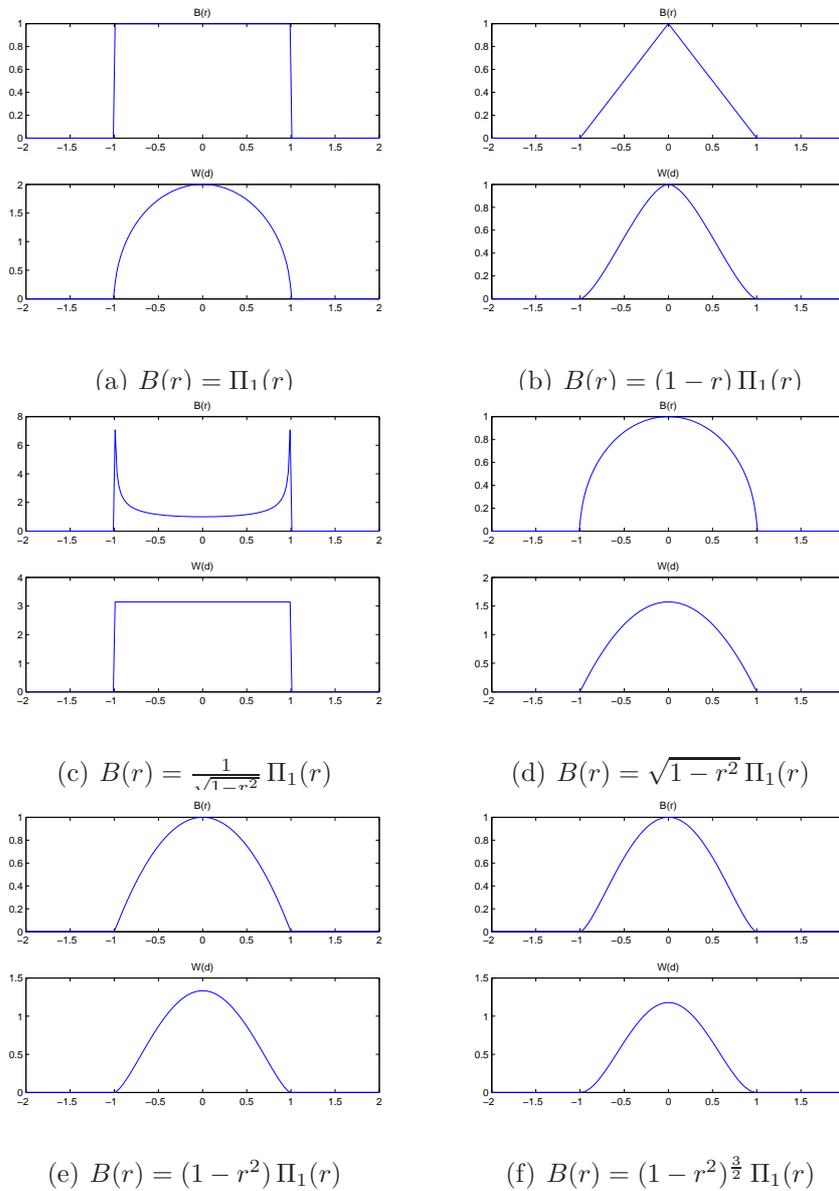


FIG. 2.9 – Bases  $B(r)$  et leur transformée d'Abel

## 2.3.2 Autres bases de fonctions à symétrie circulaire

### 2.3.2.1 Les sphéroïdales aplaties

L'étude d'une nouvelle famille de fonctions de base construites à partir de fonctions de Bessel modifiées est présentée dans [5] et [12]. Les sphéroïdales aplaties (aussi appelées 'blobs') constituent une famille de fonctions, caractérisées par deux paramètres  $m$  et  $\alpha$ .

$$B^{(m,\alpha)}(t) = \begin{cases} (1/I_m(\alpha))[1 - (t/a)^2]^{m/2} I_m\{\alpha[1 - (t/a)^2]^{1/2}\} & 0 \leq t \leq a \\ 0 & \end{cases}$$

$I_m$  est la fonction de Bessel modifiée d'ordre  $m$ ,  $a$  est le rayon du support de la fonction et  $\alpha$  contrôle la forme de la fonction. Le choix des paramètres  $m$  et  $\alpha$  va influencer sur le résultat obtenu. Un choix de ces paramètres est important. Le paramètre  $m$  va permettre de contrôler la continuité de la fonction : Pour  $m$  positif, la fonction est continue et  $m - 1$  fois dérivable ([5]). Des grandes valeurs de  $m$  vont atténuer l'amplitude de la fonction  $B$ . Garduno ([5]) propose  $m = 2$ . Dans tous les cas, la transformée de Fourier de  $B$  peut se calculer analytiquement et on montre ainsi que les fonctions de ce type sont à support fréquentiel étroit ([12]). Cette caractéristique ainsi que la facilité d'implémentation du calcul de la matrice de projection ([12]) font de ce type de fonctions une base intéressante pour la représentation d'images.

### 2.3.2.2 Ré-échantillonnage de l'image

Pour calculer les coefficients de la matrice de projection, Zhuang réalise un nouvel échantillonnage de l'image discrète en définissant des sous-pixels ([24]). La pondération pour un pixel donné est une combinaison linéaire de celle calculée pour chaque sous pixel.

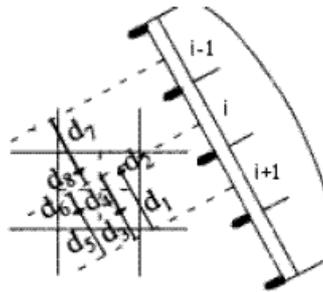


FIG. 2.10 – Le pixel est divisé en quatre sous pixels ([24])

La figure (2.10) illustre le cas où le pixel est divisé en 4 sous pixels. Pour le pixel  $j$ , les termes non nuls de la colonne  $j$  de la matrice  $H$  sont :

$$H_{i-1,j} = \frac{1}{4}w(d_7)$$

$$H_{i,j} = \frac{1}{4}(w(d_8) + w(d_2) + w(d_6) + w(d_4))$$

$$H_{i+1,j} = \frac{1}{4}(w(d_5) + w(d_3) + w(d_1))$$

Cette division en sous pixels diminue la perte de résolution due à la discrétisation de l'image.

### 2.3.3 Conséquences sur le calcul de $H$

Dans le cas de fonctions de base à symétrie circulaire, les termes de la matrice  $H$  ne dépendent que de la distance rayon-pixel. Afin de réduire les appels à la fonction  $w$  lors du remplissage de  $H$ , on a recouru à des tables où sont précalculées les valeurs de  $w$  pour des valeurs discrètes de  $d$  et  $\theta$ . La contribution d'un rayon sur une fonction de base est ensuite calculée en interpolant les valeurs de la table. Cette méthode est décrite dans [7]. Dans le cas de bases à symétrie circulaire,  $w$  dépend uniquement du paramètre  $d$ . La table est donc constituée d'une seule colonne et est donc moins coûteuse en stockage. Dans le cas de modèles 3D, la matrice  $H$  est de taille  $M \times NT$ , avec  $T$  le nombre de tranches de l'image discrète à reconstruire. Dans le cas d'une base quelconque,  $w$  va dépendre de la distance rayon-pixel et de différents angles d'inclinaison du rayon. Cela rend complexe la généralisation 3D d'un modèle de pixels carrés par exemple car il s'agit désormais du calcul de l'intersection entre une droite et un cube. Si maintenant la base choisie est à symétrie circulaire,  $w$  dépendra toujours uniquement de la distance rayon-pixel.

## 2.4 La base des pixels gaussiens

A notre connaissance, il existe une seule base présentant à la fois la propriété de séparabilité et de symétrie circulaire. Il s'agit de la base de gaussiennes. Soit :

$$b(x, y) = K e^{-\left(\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)} = B(r)$$

avec  $B(r) = K e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$ . La fonction de pondération  $w(d)$  correspondante est :

$$w(d) = K e^{-\left(\frac{d^2}{2\sigma^2}\right)} \sqrt{2\pi\sigma^2}$$

La loi de variation de  $w$  avec  $d$  est aussi gaussienne. En pratique, on utilise une version tronquée de la base, de telle façon à obtenir des fonctions  $b(x, y)$  à support spatial limité à un cercle de rayon  $a$ . On définit FWHM, la largeur à mi-hauteur de  $B(r)$  :

$$FWHM = 2\sigma \sqrt{2 \ln(2)}$$

Nous suivrons la proposition de Hanson ([7]) de tronquer  $B$  à  $r = 1.5 FWHM$ . Pour cette valeur,  $B$  atteint 0.002 fois sa valeur maximale.

### 2.4.1 Caractère creux de la matrice de projection

Nous souhaitons comparer la forme de la matrice  $H$  obtenue pour :

- la base classique de pixels carrés
- les pixels gaussiens

Dans le premier cas, les termes de la matrice s'annulent pour des distances rayons-pixels supérieures à  $(|\cos \theta| + |\sin \theta|)\Delta$  où  $\Delta$  est l'espacement de la grille (la distance entre deux pixels voisins horizontaux ou verticaux) et  $\theta$  l'angle d'inclinaison du rayon. On peut donc affirmer que pour des distances rayons-pixels  $d \geq d_{max} = \sqrt{2}\Delta$ , les termes correspondants de  $H$  sont nuls. Pour des pixels gaussiens tronqués à  $a = 1.5 FWHM$ , les termes de  $H$  sont nuls au delà de  $d_{max} = 1.5 FWHM = 1.5 \sigma \sqrt{2 \ln(2)}\Delta$ . Nous verrons dans la partie suivante qu'un choix optimal de  $\sigma$  est tel que  $FWHM = 1.5$ . On voit alors que la matrice  $H$  de la base gaussienne va contenir moins de termes nuls que celle de la base de pixels carrés. Nous avons comparé le rapport d'éléments non nuls sur le nombre total d'éléments des deux matrices sur un exemple :

	Thin	Gauss ( $FWHM$ )			
$FWHM$		0.9	1.2	1.5	2
Taux de remplissage (%)	0.99	2.02	2.69	3.36	4.48

TAB. 2.2 – Taux de remplissage de  $H$  en pourcentage du rapport du nombre d'éléments non nuls sur le nombre total d'éléments ( $N = 100 \times 100$  et  $M = 105 \times 110$ )

Le caractère moins creux de la matrice  $H$  du modèle Gauss n'est pas forcément un inconvénient. En pratique, il est courant de calculer les termes de  $H$  'au vol' car il n'est pas toujours possible de stocker la matrice  $H$  notamment dans le cas 3D. Les termes de  $H$  sont calculés au fur et à mesure des itérations de l'algorithme de reconstruction.

## 2.5 Conclusion

Il existe de nombreuses alternatives à la base classique des pixels carrés. Lorsque la fonction de base présente une symétrie circulaire, le calcul des termes de la matrice de projection est simplifié. Dans ce cas, les coefficients de pondération ne dépendent que de la distance entre le rayon et le centre du pixel. Les bases de fonctions à symétrie circulaire permettent une généralisation immédiate du calcul de  $H$  au cas 3D. Notons qu'il faudrait comparer de façon plus précise la complexité des algorithmes de remplissage de  $H$ , ce qui impliquerait des implantations plus élaborées des codes de calcul (notamment un codage en C++). Le chapitre suivant sera consacré à l'élaboration d'une méthode de calcul des  $\mu_{ij}$  dans le cas particulier de la base des pixels gaussiens. A notre connaissance, cette base est la seule qui réunit les propriétés de séparabilité et de symétrie circulaire.

# Chapitre 3

## La base de pixels gaussiens

L'emploi de pixels décomposés sur une base différente de la base naturelle des pixels carrés pose une nouvelle problématique : Comment calculer les coefficients de décomposition d'un milieu  $\mu(x, y)$  sur la nouvelle base ?

Nous allons tout d'abord nous intéresser au cas unidimensionnel puis nous tenterons de généraliser les résultats au cas bidimensionnel.

### 3.1 Décomposition d'un signal 1D

#### 3.1.1 Position du problème

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $\mathcal{I}$  de  $\mathbb{R}$ . On souhaite représenter la fonction  $f$  par une combinaison de  $N$  fonctions de bases gaussiennes  $\Phi_i(x)$  :

$$f \approx \sum_{i=1}^N \mu_i \Phi_i(x)$$

avec

$$\Phi_i(x) = \Phi\left(x - i\Delta + \frac{\Delta}{2}\right)$$

et

$$\Phi(x) = \sqrt{K} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

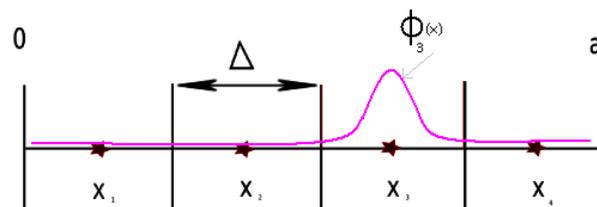


FIG. 3.1 – Illustration du cas où  $\mathcal{I} = [0, a]$  et  $N = 4$ . Sur cet exemple, on a tracé  $\Phi_3(x)$  centrée en  $x = 2\Delta + \frac{\Delta}{2}$

$K$  est un coefficient de normalisation. On munit l'espace du produit scalaire habituel :

$$\langle f|g \rangle = \int f(x)g(x)dx$$

Pour obtenir des fonctions de bases normées, on choisit :

$$K = \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2}}$$

Les coefficients  $\mu_i$  sont calculés en minimisant la norme de la différence entre  $f(x)$  et sa représentation  $\sum_i \mu_i \Phi_i(x)$ . Exprimons le critère à minimiser :

$$J(\mu) = \|f(x) - \sum_i \mu_i \Phi_i(x)\|^2 = \langle f(x) - \sum_i \mu_i \Phi_i(x) | f(x) - \sum_i \mu_i \Phi_i(x) \rangle$$

La solution de ce problème vérifie :

$$\forall k, \forall x \langle \sum_i \mu_i \Phi_i(x) | \Phi_k(x) \rangle = \langle f(x) | \Phi_k(x) \rangle$$

Soit :

$$\forall k, \forall x \sum_i \mu_i \langle \Phi_i(x) | \Phi_k(x) \rangle = \langle f(x) | \Phi_k(x) \rangle$$

Il s'agit donc de résoudre le problème des moindres carrés linéaires dont la solution générale vérifie :

$$A\mu = b$$

en notant :

- $\mu$  : vecteur des coefficients  $\mu_i$
- $A$  : matrice ( $N \times N$ ) de terme général  $\langle \Phi_i | \Phi_j \rangle$
- $b$  : vecteur de terme général  $\langle f | \Phi_i \rangle$

### 3.1.2 Construction de $b$

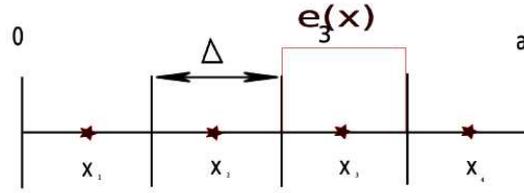
$b$  est le vecteur de taille  $N$  de terme général  $\langle f | \Phi_i \rangle$ . Il est possible de calculer ce terme en utilisant une méthode numérique de calcul d'intégrale. Afin d'obtenir une expression simplifiée de  $b_i$ , nous allons approcher  $f$  par  $S$ , vecteur de taille  $N$ , représentant une forme échantillonnée de  $f$  sur la grille des  $N$  subdivisions de  $\mathcal{I}$  (Fig. 3.2) :

$$f(x) = \sum_{i=1}^N s_i e(x_i)$$

La fonction  $e(x)$  est une fenêtre rectangulaire centrée en  $x$  de largeur  $\Delta$ . On note  $e_i(x) = e(x_i)$ . Alors :

$$\begin{aligned} b_i &= \sum_{k=1}^N s_k \langle e_k | \Phi_i \rangle \\ &= \sum_{k=1}^N s_k \psi(k-i) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Le produit scalaire  $\langle e_k | \Phi_i \rangle$  ne dépend que de la position relative des deux fonctions de base, décrite par  $k-i$ .

FIG. 3.2 – Dans ce cas,  $\mathcal{I} = [0, a]$  et  $N = 4$ 

$\psi$  est symétrique :  $\psi(i - k) = \psi(k - i)$ . Son terme général est :

$$\int_{-\frac{\Delta}{2} + |k-i|\Delta}^{\frac{\Delta}{2} + |k-i|\Delta} \sqrt{K} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

Il est possible d'exprimer ces intégrales avec la fonction **erf** :

$$\int_a^b \sqrt{K} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = (\sigma\sqrt{2\pi K}/2) \left( \operatorname{erf}\left(\frac{b}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{a}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right)$$

avec :

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-x^2} dx$$

### 3.1.3 Structure de la matrice $A$

Le terme général de la matrice  $A$  est :

$$\langle \Phi_i | \Phi_j \rangle = \xi(i - j)$$

De la même façon que précédemment, les produits scalaires entre les fonctions de base ne dépendent que de leur position relative décrite par  $i - j$ . La matrice  $A$  présente donc une structure Toeplitz. Sa première colonne a pour terme général  $\alpha_k = \xi(k - 1)$ ,  $k \in [1, N]$ . Exprimons le vecteur  $\xi$  :

$$\begin{aligned} \xi(j - i) &= K \int \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{(x - (j - i)\Delta)^2}{2\sigma^2}\right) dx \\ &= K \int \exp\left(-\frac{(x - (j - i)\Delta/2)^2}{\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{((j - i)\Delta)^2}{4\sigma^2}\right) dx \\ &= \exp\left(-\frac{((j - i)\Delta)^2}{4\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

Les termes de  $A$  décroissent donc très rapidement lorsqu'on s'éloigne de la diagonale principale.  $A$  est symétrique et quasi bande-diagonale.

### 3.1.4 Inversion du système $A\mu = b$ par approximation circulante

Nous souhaitons tirer partie de la forme Toeplitz de  $A$  ainsi que du produit de convolution présent dans la construction de  $b$ . Pour cela, nous allons utiliser une hypothèse de circularité sur l'objet à décomposer : On suppose que les  $x_i$  sont entourés le long d'un anneau de telle façon que  $x_{i+N} = x_i$ .

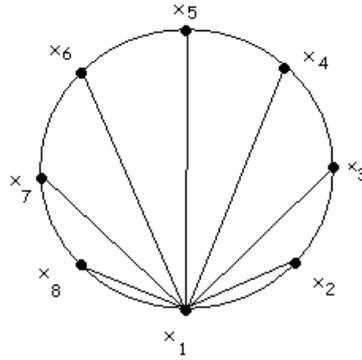


FIG. 3.3 – Description de l’hypothèse de circularité dans le cas  $N = 8$

On se place dans le cas  $N$  pair. Nous pouvons exprimer les fonctions  $\xi$  et  $\psi$  en supposant que les bases sont centrées sur les nouveaux  $x_i$  placés comme sur la figure 3.3 : Si  $|k - i| \in [\frac{N}{2} + 1, N - 1]$ ,

$$\xi(|k - i|) = \xi(N - |k - i|)$$

$$\psi(|k - i|) = \psi(N - |k - i|)$$

La matrice  $A$  devient circulante de première colonne  $\alpha_k = \xi(k-1), k \in [1, N]$ . De plus,  $x_i$  est périodique de période  $N$ . Donc il en est de même pour  $e_i(x)$  et  $\Phi_i(x)$  :

$$x_{i+N} = x_i$$

$$e_{i+N}(x) = e(x_{i+N}) = e(x_i) = e_i(x)$$

$$\Phi_{i+N}(x) = \Phi(x_{i+N}) = \Phi(x_i) = \Phi_i(x)$$

On en déduit une propriété de périodicité de  $\xi$  et  $\psi$  :

$$\xi_{(k-i)+N}(x) = \langle \Phi_k | \Phi_{i-N} \rangle = \langle \Phi_k | \Phi_i \rangle$$

$$\psi_{(k-i)+N}(x) = \langle e_k | \Phi_{i-N} \rangle = \langle e_k | \Phi_i \rangle$$

Or :

$$b_i = \sum_{k=1}^N s_k \psi(k - i), \forall i \in [1, N]$$

La périodicité de  $S$  et  $\psi$  permet d’écrire l’égalité ci-dessus sous la forme d’une convolution circulaire :

$$b = S \otimes \Psi$$

avec  $S = [f(x_1), \dots, f(x_N)]$  et  $\Psi = [\psi(0), \dots, \psi(N - 1)]$ .

### 3.1.4.1 Matrices circulantes

Rappelons la définition d'une matrice circulante ainsi que ses propriétés. Une matrice carrée  $C$  de taille  $N$  est circulante si et seulement si elle est de la forme :

$$C = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & \cdots & c_{N-2} & c_{N-1} \\ c_{N-1} & c_0 & c_1 & \cdots & \cdots & c_{N-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_2 & \cdots & \cdots & c_{N-1} & c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 & \cdots & \cdots & c_{N-1} & c_0 \end{bmatrix}$$

Les matrices circulantes sont des matrices Toeplitz particulières qui peuvent être "diagonalisées par TFD". Plus précisément, on a :

$$F C = \Gamma F$$

où  $\Gamma = \text{diag}(\gamma)$  est la matrice diagonale des valeurs propres de  $C$ . De plus le vecteur  $\gamma$  est donné par :

$$\gamma = F c$$

où  $c$  représente la première colonne de la matrice  $C$ . Dans ce qui précède,  $F$  désigne la matrice de transformation de Fourier discrète de taille  $N$  dont le terme général est donné par :

$$F_{mn} = e^{-2i\pi(m-1)(n-1)/N} ; 1 \leq m \leq N, 1 \leq n \leq N$$

Par ailleurs, la matrice  $F$  vérifie :

$$F^* F = N \Leftrightarrow F^{-1} = \frac{F^*}{N}$$

où  $*$  désigne l'opération de transconjugaison d'une matrice. Les propriétés ci-dessus permettent de simplifier le calcul de la solution d'un système du type :

$$y = C x$$

En effet, en remplaçant  $C$  par son expression en fonction de  $\Gamma$ , on obtient :

$$y = F^{-1} \Gamma F x \Leftrightarrow x = F^{-1} (\Gamma^{-1} (F y))$$

$\Gamma$  étant une matrice diagonale, effectuer le produit  $\Gamma^{-1}(F y)$  dans l'équation ci-dessus revient à diviser terme à terme les éléments de  $(F y)$  par ceux de  $\gamma$ . Pour obtenir la solution du système, on peut donc effectuer les opérations suivantes :

- obtention de  $F y$  et de  $\gamma$  par TFD de  $y$  et  $c$ , respectivement ;
- quotient terme à terme des deux quantités ci-dessus ;
- obtention de  $x$  par TFD inverse du résultat.

### 3.1.4.2 Conséquences pour la résolution du système $A\mu = b$ sous hypothèse de circularité

$A$  est circulante de première colonne  $\alpha$ . Le système  $A\mu = b$  s'inverse par :

$$\mu = F^{-1}(\text{diag}(F\alpha)^{-1}(Fb))$$

Nous avons besoin de :

- $F\alpha$ , transformée de Fourier discrète de  $\alpha$
- $Fb$ , transformée de Fourier discrète de  $b$

La transformée de Fourier discrète d'un signal  $S$  échantillonné en  $N$  points est donnée par :

$$F s(k) = \sum_{n=1}^N s(n)e^{-2i\pi\frac{kn}{N}}$$

Rappelons les expressions de  $\alpha_k$  et  $b_k$  :

- $\alpha_k = \exp(-\frac{((k-1)\Delta)^2}{4\sigma^2})$ ,  $k = 1 \dots N$
- $b_n = \sum_{k=1}^N s_k\psi(n-k)$ ,  $\forall n \in [1, N]$

Il n'existe pas d'expression simple de la transformée de Fourier discrète d'une fonction gaussienne (contrairement au cas continu). Nous utiliserons donc la fonction `fft` de Matlab. Par contre, l'hypothèse de circularité permet de simplifier le calcul de la transformée de Fourier discrète de  $b$ . Rappelons que sous cette hypothèse :

- $S$  est périodique de période  $N$
- $\psi$  est périodique de période  $N$

Exprimons la transformée de Fourier discrète de  $b$  :

$$F b(k) = \sum_{t=1}^N b(t)e^{-2i\pi\frac{kt}{N}}$$

Soit :

$$F b(k) = \sum_{t=1}^N \sum_{n=1}^N s_n\psi(t-n)e^{-2i\pi\frac{kt}{N}}$$

On introduit artificiellement  $e^{-2i\pi\frac{kn}{N}} e^{2i\pi\frac{kn}{N}} = 1$

$$F b(k) = \sum_{t=1}^N \sum_{n=1}^N s_n\psi(t-n)e^{-2i\pi\frac{k(t-n)}{N}} e^{-2i\pi\frac{kn}{N}}$$

$$F b(k) = \sum_{n=1}^N s_n e^{-2i\pi\frac{kn}{N}} \left[ \sum_{t=1}^N \psi(t-n)e^{-2i\pi\frac{k(t-n)}{N}} \right]$$

On pose  $m = t - n$ . Du fait de la périodicité des signaux  $S$  et  $\psi$

$$F b(k) = \left[ \sum_{n=1}^N s_n e^{-2i\pi\frac{kn}{N}} \right] \left[ \sum_{m=1}^N \psi(m)e^{-2i\pi\frac{km}{N}} \right]$$

$$F b(k) = F s(k) F \psi(k)$$

Récapitulons les étapes permettant d'arriver à déterminer  $\mu$  :

1. Calcul de  $\alpha$  et  $\psi$  sous approximation circulante
2. Calcul de la transformée de Fourier discrète de  $\alpha$ ,  $S$  et  $\psi$  par la fonction `fft`
3. Calcul de  $Fb = Fs \times F\psi$
4. Calcul de  $\mu = F^{-1}(\text{diag}(F\alpha)^{-1}(Fb))$ .

### 3.1.5 Résolution du système $A\mu = b$ sous l'hypothèse $\sigma$ petit

#### 3.1.5.1 Simplification de l'expression de $b$

<i>FWHM</i>	1	1.5	2	2.5	3
$\sigma$	0.4247	0.6370	0.8493	1.062	1.274
$\psi(\pm 2)$	$2.5 \cdot 10^{-4}$	0.0139	0.0643	0.135	0.2012
$\psi(\pm 3)$	$2.4 \cdot 10^{-9}$	$6.52^e - 5$	0.0028	0.017	0.0464

TAB. 3.1 – Valeur de  $\psi(\pm 2)$  et  $\psi(\pm 3)$  en fonction de  $\sigma$

Le tableau 3.1 montre que pour une valeur de  $\sigma$  relativement faible, seuls un petit nombre de  $\psi(k-i)$  sont non nuls. Si on considère que seuls  $\psi(\pm i), i < 4$  sont non nuls, on a :

$$\begin{aligned}
 b_i = & \psi(0)s_i + \psi(1)(s_{i-1} + s_{i+1}) + \\
 & \psi(2)(s_{i-2} + s_{i+2}) + \psi(3)(s_{i-3} + s_{i+3})
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

#### 3.1.5.2 Simplification de l'expression de $A$

Si on note  $L$  la largeur à mi-hauteur de la gaussienne définie par  $\xi(i-j)$ ,  $L = 4\sigma\sqrt{2\ln(2)}$ , on peut considérer que  $\xi(i-j) \ll 1$  pour  $|(i-j)|\Delta < 1.5L$ . On peut donc mettre  $A$  sous la forme suivante :

$$A = \begin{bmatrix}
 c_1 & \cdots & c_{i_{max}} & 0 & \cdots & 0 \\
 \vdots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\
 c_{i_{max}} & & & & & \\
 0 & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 \\
 & \ddots & & & & c_{i_{max}} \\
 \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
 0 & \cdots & & 0 & c_{i_{max}} & \cdots & c_1
 \end{bmatrix}$$

avec  $i_{max} = \text{Int}(\frac{1.5L}{\Delta})$ .

Le tableau (3.2) répertorie les valeurs de  $i_{max}$  en fonction du paramètre  $\sigma$ . On remarque que ces valeurs sont faibles. La matrice  $A$  est donc quasi bande diagonale.

<i>FWHM</i>	0.5	1	1.5	2	3
$\sigma$	0.2123	0.4247	0.6370	0.8493	1.274
$i_{max}$	2	4	5	7	10

TAB. 3.2 – Valeur de  $i_{max}$  en fonction de  $\sigma$ 

Dans ce cas, nous pouvons mettre  $A$  sous la forme :

$$A = \begin{bmatrix} c_1 & \cdots & c_{i_{max}} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_{i_{max}} & & & & & \\ 0 & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & \ddots & & & & c_{i_{max}} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & c_{i_{max}} & \cdots & c_1 \end{bmatrix}$$

### 3.1.5.3 Approximation circulante de $A$

Nous pouvons ajouter artificiellement des termes dans la matrice  $A$  afin d'obtenir une matrice  $\tilde{A}$  circulante. Une première possibilité est de définir  $\tilde{A}$  de la manière suivante :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} c_1 & \cdots & c_{i_{max}} & 0 & \cdots & 0 & c_{i_{max}} & \cdots & c_2 \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ c_{i_{max}} & & & & & & \vdots & \ddots & c_{i_{max}} \\ 0 & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 & & & 0 \\ & \ddots & & & & c_{i_{max}} & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & c_{i_{max}} & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & c_{i_{max}} & \cdots & c_1 & \vdots & \ddots & 0 \\ c_{i_{max}} & \ddots & & \ddots & \ddots & & c_1 & & c_{i_{max}} \\ \vdots & \ddots & & & & & & \ddots & \vdots \\ c_2 & \cdots & c_{i_{max}} & 0 & \cdots & 0 & c_{i_{max}} & \cdots & c_1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} & & & & c_{i_{max}} & \cdots & c_2 & & \\ & & & & 0 & \ddots & \vdots & & \\ & & & & \vdots & \ddots & c_{i_{max}} & & \\ & & & & 0 & & & & \\ & & & & c_{i_{max}} & \ddots & \vdots & & \\ & & & & \vdots & \ddots & 0 & & \\ \hline c_{i_{max}} & 0 & \cdots & 0 & c_{i_{max}} & \cdots & c_1 & & c_{i_{max}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_2 & \cdots & c_{i_{max}} & 0 & \cdots & 0 & c_{i_{max}} & \cdots & c_1 \end{array} \right]$$

On observe sur les équations ci-dessus que  $\tilde{A}$  est égale à  $A$  à laquelle on rajoute des lignes et des colonnes. Ceci impose de modifier la définition de  $b$  et de  $\mu$  en conséquence et on définit donc les vecteur  $\tilde{\mu}$  et  $\tilde{b}$  tels que :

$$\tilde{\mu}^t = ( \mu^t \mid \tilde{\mu}_{N+1}, \dots, \tilde{\mu}_{N+i_{max}-1} )$$

$$\tilde{b}^t = ( b^t \mid \underbrace{0, \dots, 0}_{i_{max}-1 \text{ composantes}} )$$

Le modèle approché s'écrit alors :

$$\tilde{b} = \tilde{A}\tilde{\mu}$$

Le modèle original et le modèle approché sont équivalents si et seulement si :

$$(\tilde{\mu}_{N+1}, \dots, \tilde{\mu}_{N+i_{max}-1}) = (0, \dots, 0)$$

L'inconvénient de ce choix est que l'on modifie la taille du problème. Une autre possibilité est :

$$\tilde{A} = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} c_1 & \cdots & c_{i_{max}} & 0 & \cdots & 0 & c_{i_{max}} & \cdots & c_2 \\ \vdots & \ddots & & \ddots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_{i_{max}} & & & & & & \ddots & \ddots & c_2 \\ 0 & \ddots & & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ 0 & & & \ddots & & & & \ddots & 0 \\ c_{i_{max}} & \ddots & & & & & & & c_{i_{max}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \ddots & & & \vdots \\ c_2 & \cdots & c_{i_{max}} & 0 & \cdots & 0 & c_{i_{max}} & \cdots & c_1 \end{array} \right]$$

Dans les deux cas, les approximations ne permettent pas d'inverser le système de manière exacte.

### 3.1.5.4 Conclusion

L'hypothèse  $\sigma$  petit permet d'obtenir  $A$  et  $b$  creux. Nous en tirerons partie dans le cas 2D. Dans le cas unidimensionnel, nous conservons la formulation du problème décrite en 3.1.4.2. Notons que l'unique modification apportée par la deuxième formulation est due à la troncature des gaussiennes. Les deux approximations circulantes sont équivalentes.

### 3.1.6 Mise en œuvre

On cherche à décomposer le signal en figure 3.4 sur la base de gaussiennes d'écart-type  $\sigma$  fixé.  $\mu$  sera calculé en inversant  $\tilde{A}$  par la méthode présentée 3.1.4.2 (utilisation des fonctions `fft` et `ifft`).

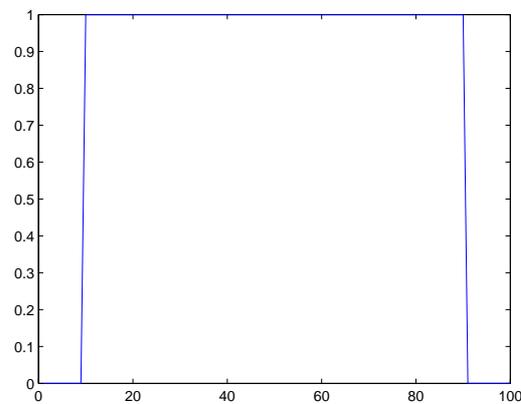


FIG. 3.4 – Signal à décomposer sur la base

### 3.1.7 Résultats

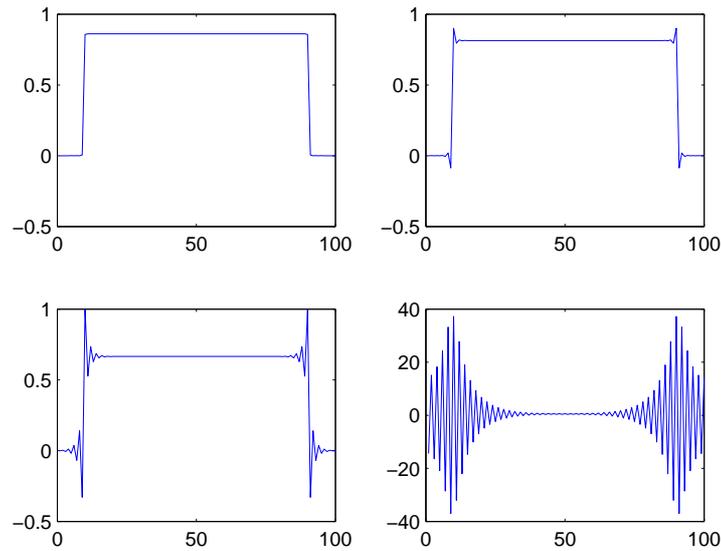


FIG. 3.5 – Coefficients  $\mu$  pour différentes valeurs de  $\sigma$  :  $\sigma = 0.2, 0.43, 0.85, 1.3$

On représente ensuite la fonction :

$$f_{rec}(x) = \sum_{i=1}^N \mu_i \Phi_i(x)$$

afin de la comparer à :

$$f(x) = \sum_{i=1}^N s_i e_i(x) \quad (3.3)$$

Les figures 3.6, 3.7 et 3.8 montrent  $f_{rec}(x)$  ainsi que  $f(x)$ . Les valeurs de  $x$  sont choisies sur une grille plus fine que celle utilisée pour décrire le signal  $S$ . Les valeurs de la fonction  $f$  d'origine sur cette nouvelle grille sont obtenues par une interpolation de type plus proches voisins sur le signal  $S$ , en accord avec l'égalité (3.3).

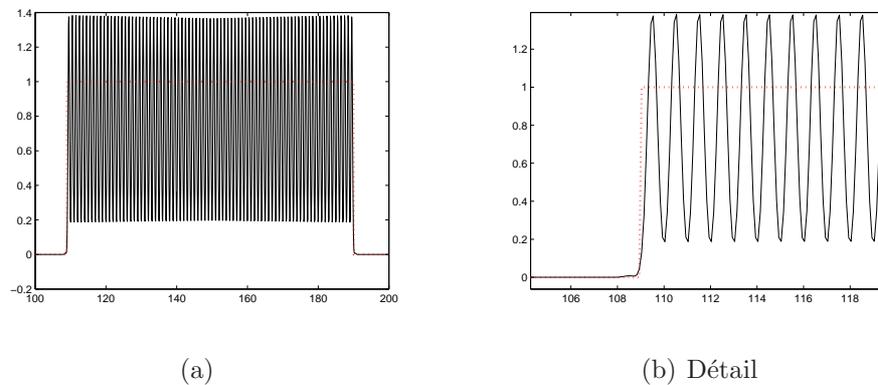


FIG. 3.6 – Décomposition du signal pour  $\sigma = 0.2$ . En traits discontinus,  $f(x)$  et en traits continus  $f_{rec}(x)$ . L'erreur de représentation est de 0.2538.

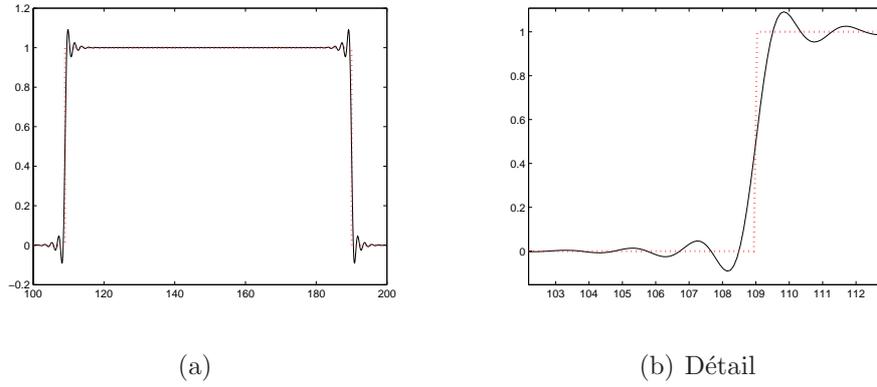


FIG. 3.7 – Décomposition du signal pour  $\sigma = 0.64$ . L'erreur de représentation est de 0.0041.

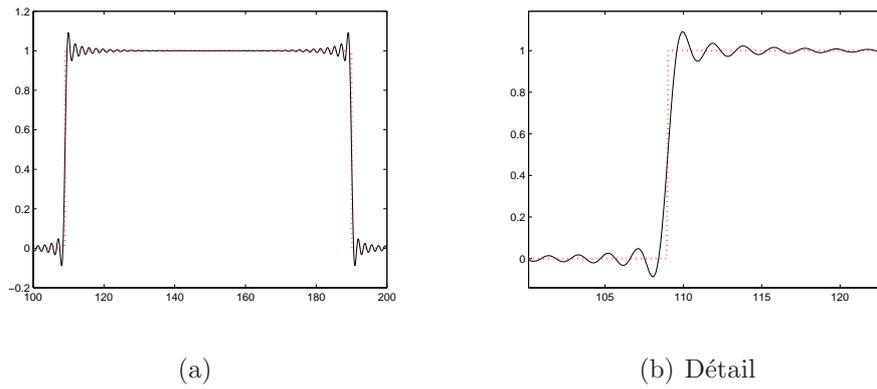


FIG. 3.8 – Décomposition du signal pour  $\sigma = 1.3$ . L'erreur de représentation est de 0.0048.

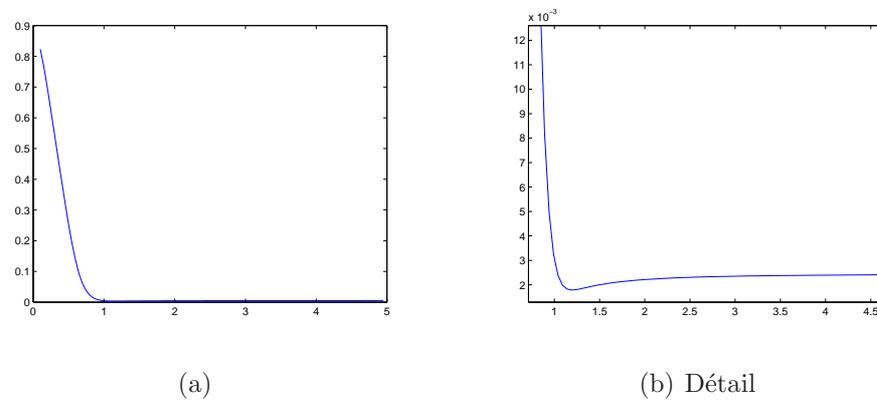


FIG. 3.9 – Variation de l'erreur de représentation en fonction de  $FWHM$

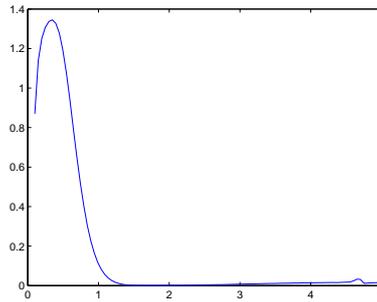


FIG. 3.10 – Amplitude des oscillations dans la zone centrale du signal, en fonction de  $FWHM$

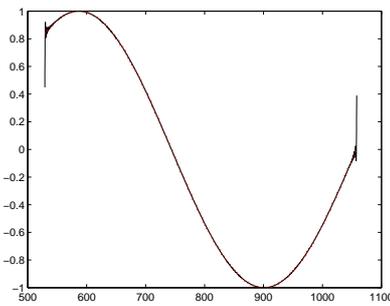


FIG. 3.11 –  $f(x)$  est tracé en traits discontinus et  $f_{rec}$  en traits continus ( $\sigma = 1.3$ ). Pour un tel signal, l'approximation circulante entraîne des problèmes aux bords.

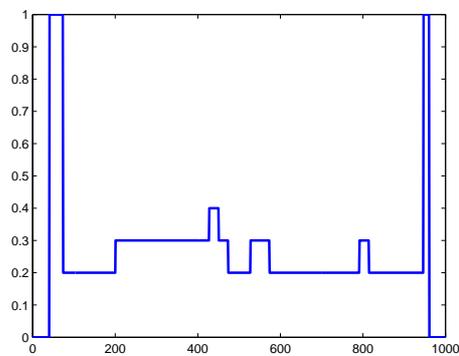


FIG. 3.12 – Fonction à décomposer  $f(x)$

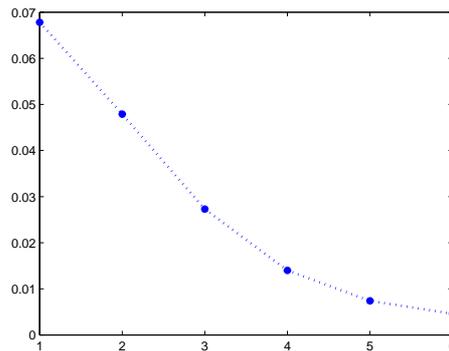


FIG. 3.13 – Pour le signal décrit ci-dessus, nous traçons l'erreur de représentation en fonction de la résolution  $N$  pour  $N = 20, 40, 80, 160, 320$  et  $640$

### 3.1.8 Analyse des résultats

#### 3.1.8.1 Validité de l'approximation circulante

La figure 3.11 illustre le cas où l'approximation circulante entraîne des erreurs au niveau de la décomposition. Le signal considéré n'est pas 'circulant' :  $f(x_N) \neq f(x_1)$  alors que c'est le cas pour  $f_{rec}$ . Ces erreurs sont d'autant plus importantes que  $\sigma$  est grand car les bases gaussiennes seront moins localisées.

#### 3.1.8.2 Influence de la valeur de $N$

La figure 3.13 montre que la qualité de la décomposition augmente avec le nombre de coefficients  $N$ . Pour  $N$  qui tend vers l'infini, on doit avoir une erreur de représentation qui s'annule.

#### 3.1.8.3 Choix de $\sigma$

La figure 3.9 montre qu'en dessous d'une certaine valeur de  $\sigma$ , l'erreur tend à croître. Les gaussiennes deviennent plus étroites que  $\Delta$ , jusqu'à tendre vers des Diracs. Au delà de cette valeur  $\sigma_{min}$ , l'erreur évolue très peu. Elle atteint son minimum pour  $FWHM = 1.18\Delta$  soit  $\sigma = 0.5\Delta$ . D'autre part, nous avons remarqué que pour  $\sigma$  trop élevé (typiquement, de l'ordre de  $3\Delta$ ), des termes nuls apparaissent dans  $\text{fft}(\alpha)$ , entraînant une division par zéro au niveau du calcul des  $\mu_i$ .

#### 3.1.8.4 Théorème de Nyquist-Shannon et repliement spectral

Le repliement spectral est un phénomène qui peut se produire lorsque des fréquences qui ne peuvent normalement pas être représentées sont introduites par erreur dans le signal, par conséquence de son échantillonnage ne respectant pas le théorème d'échantillonnage de Nyquist-Shannon.

Si on veut utiliser un signal échantillonné, il faut être sûr que celui-ci contienne toute l'information du signal d'origine. Une perte d'information se produit si le pas d'échantillonnage est trop grand par comparaison avec les périodes en cause. Pour qu'un signal soit correctement échantillonné, la fréquence

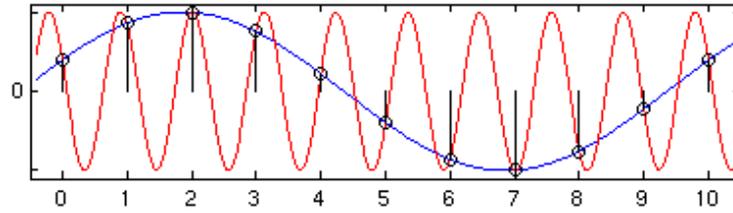


FIG. 3.14 – Le signal échantillonné noir peut provenir des deux sinusoïdes (entre autre). Sur ce graphe, la condition de Nyquist est satisfaite si le signal original est la sinusoïde bleue

d'échantillonnage doit être supérieure au double de la plus haute fréquence contenue dans le signal. Cette fréquence limite s'appelle la fréquence de Nyquist.

$$f > 2 f_{max}$$

La décomposition d'un signal sur une base de fonctions passe par une étape d'échantillonnage du signal. La période de cet échantillonnage correspond à  $\Delta$ , distance entre deux bases voisines. La fréquence maximale présente dans le signal reconstruit est donnée par le théorème de Nyquist-Shannon :

$$f_{max} < \frac{1}{2\Delta}$$

Pour respecter ce théorème, les fonctions de bases ne doivent pas contenir de fréquences supérieures à  $f_{max}$  dans leur spectre. [7] et [23] en déduisent une condition sur le choix de  $\sigma$  :

$$\sigma > \frac{\Delta}{\sqrt{2 \ln 2}}$$

### 3.1.8.5 Phénomène de Gibbs

En comparant  $f(x)$  et  $\sum_i \mu_i \Phi_i(x)$ , on voit apparaître des oscillations au niveau des discontinuités (figure 3.16). Ceci ressemble au phénomène de Gibbs. Ce phénomène intervient lorsque l'on cherche à représenter des fonctions discontinues par une combinaison de fonctions continues. Le phénomène a été mis en évidence pour la décomposition en série de Fourier ainsi que pour la décomposition sur une base de polynômes orthogonaux.

Ce phénomène est ennuyeux car les images que nous voulons représenter sur la base de gaussiennes présentent des discontinuités liées à des changements brusques de matériaux. A moins d'utiliser une grille d'échantillonnage très fine, il est incorrect de poser  $\mu(x, y)$  continue.

Nous avons tracer l'évolution de l'amplitude de ces oscillations en fonction de  $FWHM$  sur la figure 3.10. Nous voyons que le phénomène de Gibbs est très important quand  $FWHM$  est petit. Il atteint son minimum pour  $FWHM = 1.7\Delta$  soit  $\sigma = 0.73\Delta$ .

### 3.1.8.6 Analyse dans le domaine fréquentiel

La figure 3.5 montre les coefficients  $\mu_i$  de la décomposition sur une base de gaussiennes pour différents réglages de  $\sigma$ . Une remarque importante peut être faite à la vue de ces coefficients. Plus  $\sigma$  est élevé,

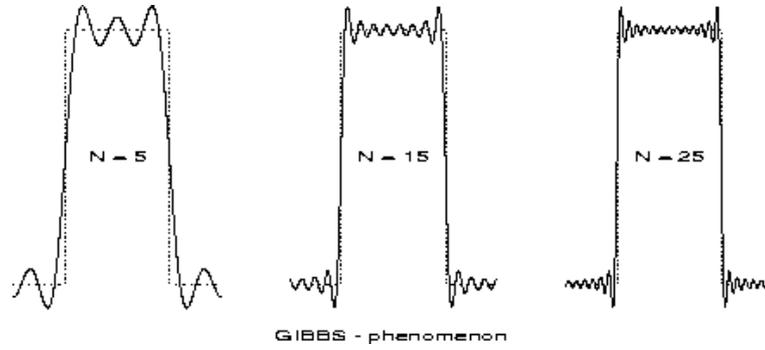


FIG. 3.15 – Illustration du phénomène de Gibbs dans le cas de la décomposition en série de Fourier d'une fenêtre rectangulaire

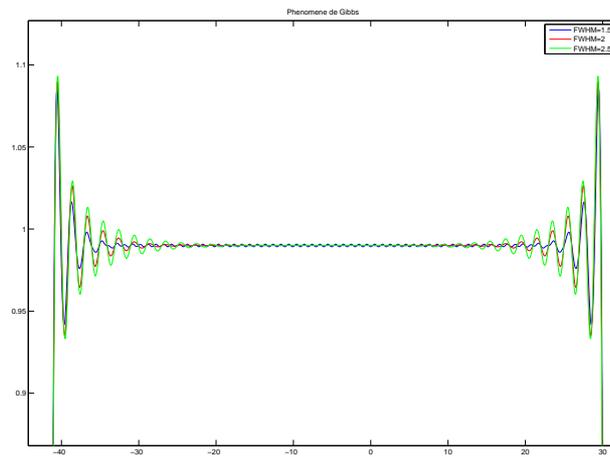


FIG. 3.16 – Oscillations dues à la mauvaise représentation des discontinuités

plus il semble y avoir de termes haute fréquence dans la décomposition. Une analyse dans le domaine de Fourier du processus de décomposition permet d'expliquer ce phénomène.

- Produit de convolution circulaire

On appelle convolution circulaire, le produit de convolution de deux signaux périodiques de même période  $N$  :

$$y(n) = h(n) \otimes x(n) = \sum_{i=0}^{N-1} h(i).x(n-i) = \sum_{i=0}^{N-1} x(i).h(n-i)$$

Le résultat est lui-même périodique et de longueur  $N$ .

La transformée de Fourier d'un produit de convolution circulaire est un produit simple :

$$y(n) = h(n) \otimes x(n) \quad \Rightarrow \quad Y(k) = X(k).H(k)$$

- Application à la décomposition sur une base de fonctions

Nous définissons la fonction  $\Phi_i$  par :

$$\Phi_i(x) = \sqrt{K} e^{-\frac{(x-i\Delta)^2}{2\sigma^2}}$$

et  $K = \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2}}$  de telle sorte que  $\int \Phi_i^2(x) dx = 1$ . De plus, on note :

$$\Phi(x) = \sqrt{K} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Si  $\Delta = 1$ , alors  $\Phi_i(x_j) = \Phi(x_j - x_i)$  donc

$$f(x_j) = \sum_{i=1}^N \mu_i \Phi_i(x_j)$$

peut s'écrire sous la forme d'un produit de convolution circulaire :

$$f(x_j) = \mu_j \otimes \Phi(x_j)$$

Quelle que soit la valeur de  $\sigma$ ,  $f$  doit restée inchangée donc son spectre de Fourier aussi. Or lorsque  $\sigma$  croît, le support fréquentiel des fonctions de bases  $\Phi_i$  devient de plus en plus étroit. Donc , pour compenser ce retrécissement du spectre, des termes haute fréquence vont apparaître dans  $\mu$ .

### 3.1.9 Différence avec une interpolation

Pour calculer les coefficients  $\mu_i$  , nous avons supposé que :

$$f(x) = \sum_i s_i e_i(x)$$

Il est possible de poser le problème de décomposition en évitant cette hypothèse.

On cherche à représenter une fonction  $f(x)$  connue en un nombre fini de points  $x_i$  par une combinaison linéaire de fonctions de 'base' gaussiennes :

$$f(x) = \sum_i \mu_i \Phi_i(x)$$

Nous souhaitons utiliser l'information a priori :

$$f(x_j) = s_j = \sum_i \mu_i \Phi_i(x_j)$$

Si on définit la matrice  $M$  par :

$$M_{ij} = \Phi_i(x_j)$$

le problème d'interpolation s'écrit :

$$\mu = M^{-1} s$$

Si  $\Delta = 1$ , la matrice  $M$  a la même structure que la matrice  $A$ . Elle est Toeplitz, symétrique et quasi bande diagonale.

$$M_{ij} = \Phi_i(x_j) = \Phi(x_{i-j})$$

Cette forme de 'décomposition' n'est pas retenue ici. Nous ne sommes plus placés dans un espace euclidien.

## 3.2 Décomposition d'un signal 2D

### 3.2.1 Position du problème

Soit  $S = [s_{11}, \dots, s_{NN}]$  un milieu bidimensionnel échantillonné en  $N \times N$  points tel que  $\mu(x_i, y_j) = s_{ij}$ . On souhaite représenter la fonction  $\mu(x, y)$  à l'aide d'une combinaison de fonctions de bases  $b_{ij}(x, y) = \Phi_i(x)\Phi_j(y)$  :

$$\mu(x, y) = \sum_{ij} \mu_{ij} b_{ij}(x, y)$$

avec

$$b_{ij}(x, y) = b(x - i\Delta, y - j\Delta) = \Phi(x - i\Delta)\Phi(y - j\Delta)$$

et

$$\Phi(x) = \sqrt{K} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

On se place toujours dans l'espace euclidien munit du produit scalaire :

$$\langle f|g \rangle = \int f(x)g(x)dx$$

et, afin d'obtenir des fonctions de bases normées,

$$K = \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2}}$$

Les coefficients  $\mu_{ij}$  sont calculés en minimisant la norme de la différence entre  $\mu(x, y)$  et sa représentation  $\sum_{ij} \mu_{ij} \Phi_i(x)\Phi_j(y)$ . Exprimons le critère à minimiser :

$$J(\mu) = \|\mu(x, y) - \sum_{ij} \mu_{ij} \Phi_i(x)\Phi_j(y)\|^2 = \langle \mu(x, y) - \sum_{ij} \mu_{ij} \Phi_i(x)\Phi_j(y) | \mu(x, y) - \sum_{ij} \mu_{ij} \Phi_i(x)\Phi_j(y) \rangle$$

La solution de ce problème vérifie :

$$\forall(k, l), \forall(x, y) \langle \sum_{ij} \mu_{ij} \Phi_i(x)\Phi_j(y) | \Phi_k(x)\Phi_l(y) \rangle = \langle \mu(x, y) | \Phi_k(x)\Phi_l(y) \rangle$$

Soit :

$$\forall(k, l), \forall(x, y) \sum_{ij} \mu_{ij} \langle \Phi_i(x)\Phi_j(y) | \Phi_k(x)\Phi_l(y) \rangle = \langle \mu(x, y) | \Phi_k(x)\Phi_l(y) \rangle$$

Il s'agit donc d'inverser le système linéaire suivant :

$$A\mu = b$$

$\mu$  vecteur des coefficients  $\mu_{ij}$

$A$  matrice de terme général  $\langle b_{ij} | b_{kl} \rangle$

$b$  vecteur de terme général  $\langle \mu | b_{ij} \rangle$

Le terme général de la matrice  $A$  peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} [A]_{ij,kl} &= \langle b_{ij} | b_{kl} \rangle \\ &= \langle \Phi_i | \Phi_k \rangle \langle \Phi_j | \Phi_l \rangle \\ &= p_{ik} q_{kl} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Par la suite, on utilisera la notation suivante : Pour un vecteur  $f$  de taille  $N^2$ , et la matrice  $F$  de taille  $N \times N$ ,  $f \equiv F$  signifie que le vecteur  $f$  est construit de la façon suivante :

$$f = \begin{pmatrix} F_{11} \\ \vdots \\ F_{1N} \\ \hline F_{21} \\ \vdots \\ \vdots \\ \hline F_{N1} \\ \vdots \\ F_{NN} \end{pmatrix}$$

Définissons  $M$  comme la matrice de terme général  $\mu_{ij}$  telle que  $\mu \equiv M$ . On établit que

$$\mu \equiv M \Rightarrow A\mu \equiv PMQ^t$$

Il est équivalent de résoudre le système  $PMQ^t = B$  avec  $b \equiv B$ ,  $\mu \equiv M$  et  $A\mu \equiv PMQ^t$ .

### 3.2.2 Calcul des éléments des matrices $P$ et $Q$

Le terme général de la matrice  $P$  a pour expression :

$$\begin{aligned} p_{ik} &= \langle \Phi_i | \Phi_k \rangle \\ &= \xi(k - i) \end{aligned}$$

(3.5)

où  $\xi$  est définie au 3.1.3 :

$$\xi(s) = \exp\left(-\frac{(s\Delta)^2}{4\sigma^2}\right)$$

Les mêmes calculs conduisent à l'expression du terme général de  $Q$  :

$$q_{jl} = \xi(j - l)$$

Nous avons donc :

$$P = Q = P^t$$

alors le système à résoudre devient :

$$PMP = B$$

Notons que  $P$  est identique à la matrice  $A$  obtenue dans le cas 1D.

### 3.2.3 Formation du vecteur $b$

La première étape de la décomposition sur la base est le calcul du vecteur  $b$ . C'est le vecteur de terme général  $\langle \mu | b_{ij} \rangle$  avec  $b_{ij}(x, y) = \Phi_i(x)\Phi_j(y)$  et  $\Phi_i(x) = \Phi(x - i\Delta)$ . On va créer la matrice  $B$  telle que  $B \equiv b$ . Lorsque l'image à décomposer est "pixelisée" sur la base usuelle de pixels carrés homogènes de côté  $\Delta$ , le calcul des coefficients de  $B$  peut se faire de la manière suivante :

$$\mu(x, y) = \sum_{ij} s_{ij} e_i(x) e_j(y)$$

Le coefficient  $B_{ij}$  s'exprime alors :

$$\begin{aligned} B_{ij} &= \sum_{kl} s_{kl} \langle e_k | \Phi_i \rangle \langle e_l | \Phi_j \rangle \\ &= \sum_{kl} s_{kl} \psi(k - i) \psi(l - j) \end{aligned}$$

où  $\psi$  est définie au 3.1.2.

### 3.2.4 Inversion du système

Soit le système à résoudre

$$PMP = B$$

La matrice  $P$  est de taille  $N \times N$ . Elle est Toeplitz, symétrique et quasi bande diagonale. Supposons que l'on ait à résoudre :

$$\tilde{P}M\tilde{P} = B$$

avec  $\tilde{P}$  circulante. En remplaçant  $\tilde{P}$  par son expression en fonction de  $\Gamma$ , matrice diagonale de ses valeurs propres, on a :

$$B = F^{-1}\Gamma F M F^{-1}\Gamma F$$

Soit :

$$M = F^{-1}\Gamma^{-1}FBF^{-1}\Gamma^{-1}F$$

Il est possible d'implanter cette formule très simplement sous Matlab en utilisant les fonctions de transformées de Fourier discrètes `fft` et `ifft`. En effet :

$$\begin{aligned} FB &= \text{fft}(B) \\ BF &= \text{fft}(B^T) \\ F^{-1}B &= \text{ifft}(B) \\ BF^{-1} &= \text{ifft}(B^T) \end{aligned}$$

Soit :

$$M = \text{fft}((\Gamma^{-1}(\text{ifft}(\text{fft}(B)^T))\Gamma^{-1})^T)$$

Les matrices  $\tilde{P}$  et  $B$  seront calculées en se plaçant sous l'hypothèse  $\sigma$  petit. Nous utilisons des méthodes identiques à celles décrites au 3.1.5. L'approximation circulante retenue sera celle qui n'implique pas de modification de la taille du problème.

#### 3.2.4.1 Cas d'une image non carrée

Le calcul ci-dessus se généralise au cas où l'image à décomposer est de taille  $N_1 \times N_2$ , avec  $N_1 \neq N_2$ . Dans ce cas, les matrices  $P$  et  $Q$  sont différentes. Elles sont symétriques, Toeplitz, de taille respective  $N_1 \times N_1$  et  $N_2 \times N_2$ . La formule d'inversion du système par `fft` est alors :

$$M = \text{fft}((\Gamma_2^{-1}(\text{ifft}(\text{fft}(B)^T))\Gamma_1^{-1})^T)$$

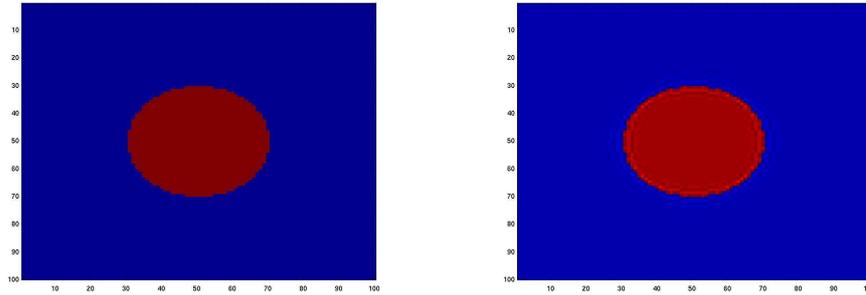
### 3.2.5 Application

#### 3.2.5.1 Méthodologie

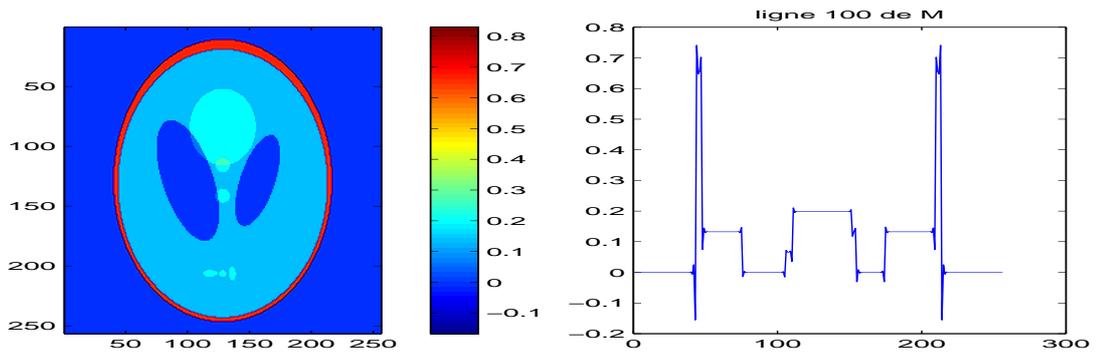
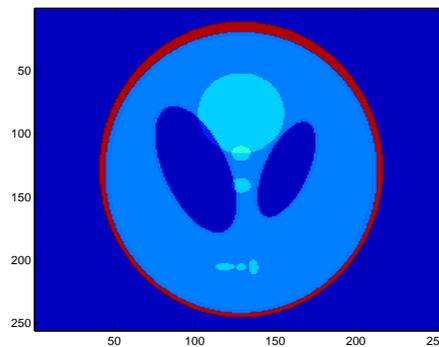
- Choix d'une image  $S$  de taille  $N \times N$
- Choix de  $\sigma$
- Calcul de  $B, P$  puis de  $M$
- Calcul de  $S_{rec_{ij}} = \sum_{kl} \mu_{kl} b_{kl}(x_i, y_j), \forall (i, j)$ .

On teste plusieurs valeurs de  $\sigma$ , le critère de choix étant la minimisation de l'erreur (au sens de la norme deux) entre  $S$  et  $S_{rec}$ , appelée erreur de représentation.

#### 3.2.5.2 Résultats



(a) Milieu à décomposer

(b)  $S_{rec}$ FIG. 3.17 – L'erreur de représentation est de  $4,6 \cdot 10^{-4}$  pour  $FWHM = 0.9$ FIG. 3.18 – Coefficients de la décomposition du fantôme de Shepp-Logan ( $N = 256$ ) pour  $FWHM = 1$ FIG. 3.19 –  $S_{rec}$  pour  $FWHM = 1$ , l'erreur est de 0.003

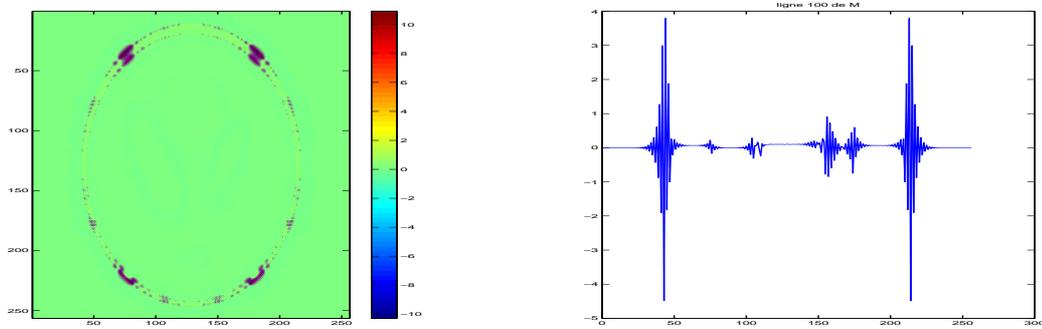


FIG. 3.20 – Coefficients de la décomposition du fantôme de Shepp-Logan ( $N = 256$ ) pour  $FWHM = 2$

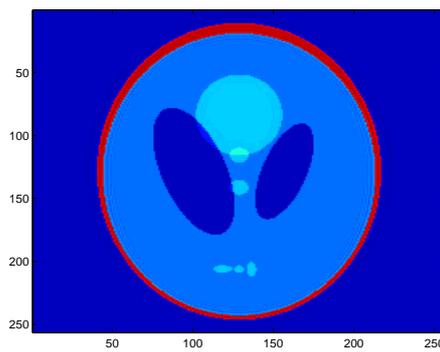


FIG. 3.21 –  $S_{rec}$  pour  $FWHM = 2$ , l'erreur est de 0.0076

Pour la figure 3.23, la signification de l'abscisse est :

1.  $N = 20 \times 20$  pixels
2.  $N = 40 \times 40$  pixels
3.  $N = 80 \times 80$  pixels
4.  $N = 160 \times 160$  pixels
5.  $N = 320 \times 320$  pixels
6.  $N = 640 \times 640$  pixels

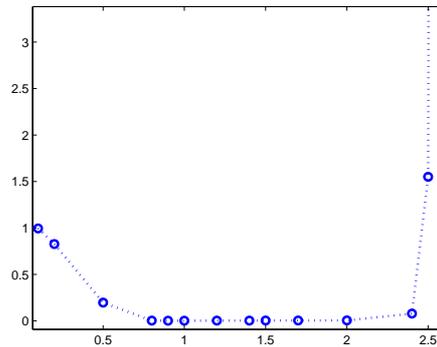


FIG. 3.22 – Evolution de l'erreur de représentation en fonction de  $FWHM$  pour  $N = 320$

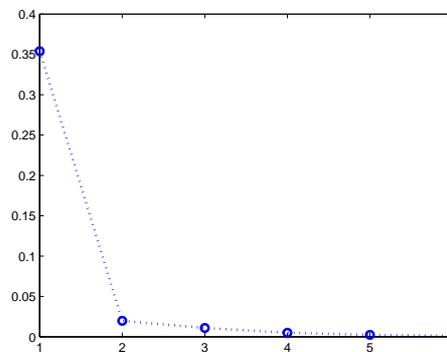


FIG. 3.23 – Evolution de l'erreur de représentation en fonction de  $N$  pour  $FWHM = 1$

### 3.2.5.3 Analyse des résultats

- Hypothèse  $\sigma$  petit

La figure 3.22 montre l'évolution de l'erreur de représentation définie par  $\frac{\|S - S_{rec}\|_2^2}{\|S\|_2^2}$  en fonction de  $FWHM$ . Nous remarquons l'erreur augmente brutalement lorsque  $FWHM > 1.5\Delta$ . Ceci est du au fait que la matrice  $B$  est construite sous l'hypothèse  $\sigma$  petit.

- Influence de la résolution

La figure 3.23 montre l'erreur de représentation pour  $FWHM = 1$  et  $I = J = 20, 40, 80, 160, 320$  et 640. Entre chaque essai, on multiplie par 4 le nombre de pixels de l'image discrétisée, ce qui revient à diviser chaque pixel en 4 sous pixels. L'erreur de représentation diminue lorsque  $N$  augmente. Lorsque  $N$  tend vers l'infini, les gaussiennes vont tendre vers des diracs et l'erreur de représentation va s'annuler.

- Termes haute fréquence

Comme dans le cas unidimensionnel, l'augmentation de  $FWHM$  se traduit par l'apparition de termes haute fréquence dans  $M$ . (Figures 3.20 et 3.18.

- Termes négatifs

Même si tout le milieu que l'on souhaite représenter est positif, il est possible que certains  $\mu_{ij}$  soient négatifs. Nous verrons que ceci à son importance lors du choix de l'algorithme de reconstruction.

- Phénomène de Gibbs

La figure 3.17 illustre la manifestation du phénomène de Gibbs dans le cas bidimensionnel.

- Choix de  $\sigma$

Par la suite, nous choisirons toujours  $\sigma = 0.64$ , correspondant à une valeur de  $FWHM = 1.5$ . Nous avons testé ce réglage sur plusieurs types d'images. Dans ce cas, le phénomène de Gibbs est peu visible, l'hypothèse  $\sigma$  faible est respectée, et  $\mu$  n'est pas trop 'oscillant'.

### 3.3 Analyse comparative de deux bases de représentation différentes

#### 3.3.1 Position du problème

Nous souhaitons illustrer l'affirmation suivante : lorsque l'on augmente la résolution de la grille, l'erreur de représentation diminue jusqu'à tendre vers 0 et ceci quelle que soit la base choisie.

Soit le milieu à représenter  $f(x, y)$  et une fonction de base  $b(x, y)$  à support local. Nous souhaitons représenter le milieu sur un compact carré  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{R}^2$ .  $\mathcal{C}$  est discrétisé sur une grille de taille  $I \times J = N$ . On appelle  $N$  la résolution de la grille. L'espacement des points de la grille est décrit par  $\Delta_x$  et  $\Delta_y$ . De la fonction  $b(x, y)$ , on déduit  $b_{ij}(x, y)$  centrée en  $(x_i, y_j)$ . Les  $b_{ij}$  se déduisent les unes des autres par décalages réguliers en  $x$  et  $y$ . Notre objectif est de comparer  $f(x, y)$  ( $(x, y) \in \mathcal{C}$ ) et la représentation sur la base :

$$f_{rec}(x, y) = \sum_{ij} \mu_{ij} b_{ij}(x, y), (x, y) \in \mathcal{C}$$

#### 3.3.2 Application

On choisit de représenter la fonction  $f(x, y)$  constituée d'une combinaison d'ellipses. Le domaine  $\mathcal{C}$  sera décrit par une grille de  $1024 \times 1024$  pixels. Nous allons comparer la représentation de  $f$  sur des pixels carrés et gaussiens pour  $N = 10 \times 10, 20 \times 20, 40 \times 40, 80 \times 80$  et  $160 \times 160$ . Le passage de deux résolutions consécutives se fait en multipliant  $N$  par 4, ce qui revient à subdiviser un pixel de la grille

en 4 sous pixels. Les  $\mu_{ij}$  de la base de pixels gaussiens sont calculés pour des gaussiennes d'écart type  $\sigma = 0.64$  correspondant à une  $FWHM = 1.5$ . Ce choix correspond à une minimisation de l'erreur lors du calcul des coefficients  $\mu_{ij}$ . Dans le cas de la base de pixels carrés, les  $\mu_{ij}$  correspondent à  $f(x_i, y_j)$ . L'erreur de représentation est définie par :

$$\frac{\|f - f_{rec}\|_2^2}{\|f\|_2^2}$$

et

$$\|f\|_2^2 = \sqrt{\sum_{i,j \in [1, \dots, 1024]} f(x_i, y_j)^2}$$

$N$	10	20	40	80	160
Pixels carrés	1.0182	0.6181	0.4202	0.1758	0.1317
Pixels gaussiens	1.1554	0.8612	0.4229	0.1710	0.1055

TAB. 3.3 – Erreur de représentation pour deux bases différentes.



FIG. 3.24 – milieu  $f(x, y)$  représenté sur une version discrétisée de  $\mathcal{C}$  de résolution  $1024 \times 1024$

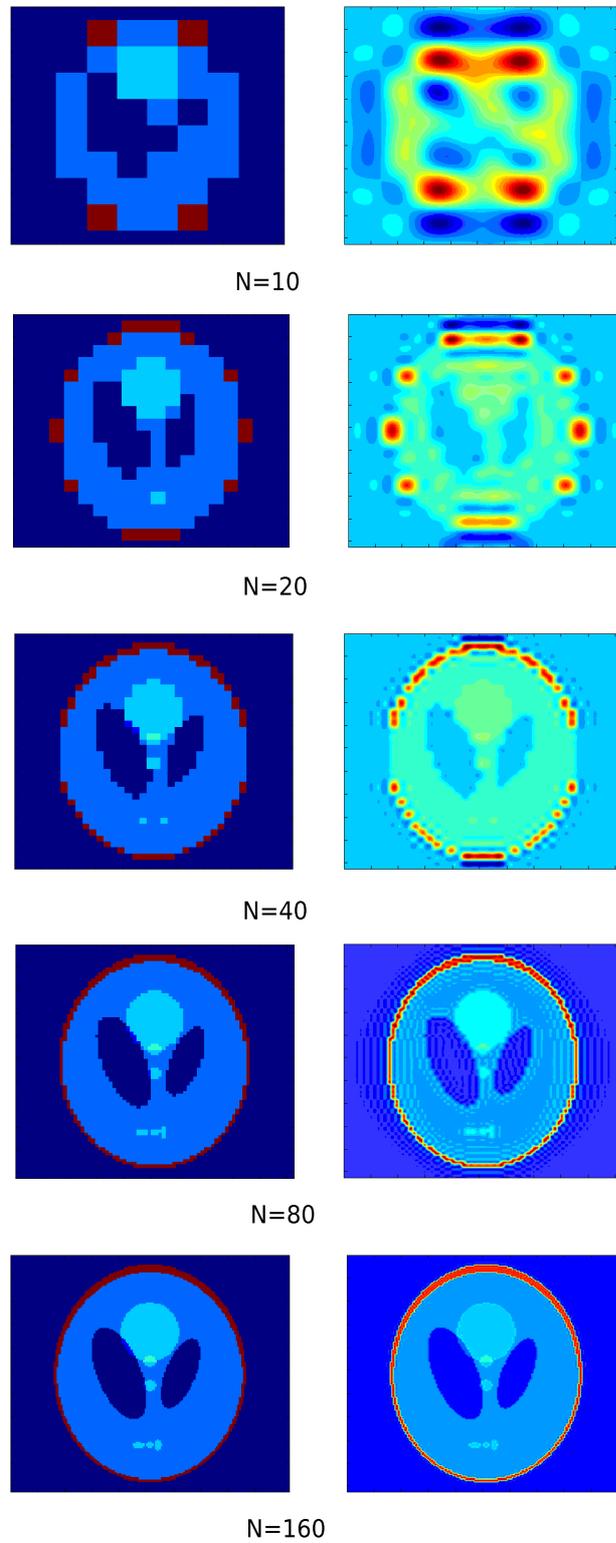


FIG. 3.25 – Comparaison de  $f_{rec}(x, y)$  pour  $(x, y) \in \mathcal{C}$ . A gauche : base de pixels carrés. A droite : base de pixels gaussiens

### 3.3.3 Interprétation

Tout d'abord, on constate que l'erreur diminue alors qu'on augmente la résolution de la grille de représentation. Nous avons choisi délibérément un milieu discontinu et contenant des zones homogènes. Nous avons vu dans la partie précédente que les pixels gaussiens étaient peu efficaces pour représenter de telles fonctions. Nous sommes donc dans un cas qui apparaît comme défavorable pour la base de gaussiennes. Cependant, nous remarquons que les erreurs sont du même ordre de grandeur pour les deux bases. Lorsque  $N$  augmente, l'erreur de représentation sur la base gaussienne devient inférieure à celle sur la base de pixels carrés. Pour une résolution de grille donnée, il semble que les deux bases soient donc équivalentes en terme de qualité de représentation.

## 3.4 Influence du choix de la base de représentation sur la qualité du modèle de mesure

### 3.4.1 Position du problème

Nous utilisons la formulation du problème de reconstruction en tomographie utilisée dans les méthodes itératives. Les mesures de projection sont stockées dans un vecteur  $P$  de taille  $M = N_t \times N_\theta$ ,  $N_t$  correspond au nombre de détecteurs et  $N_\theta$  au nombre d'angles de projections. Le milieu à reconstruire est discrétisé sur une grille de taille  $N = I \times J$  et est représenté par les coefficients  $\mu_{ij}$  de la base choisie :

$$\mu(x, y) = \sum_{ij} \mu_{ij} b_{ij}(x, y)$$

Le modèle est décrit à travers des coefficients dits de pondération stockés dans une matrice  $H$ . Chaque ligne de  $H$  correspond à un rayon donné et contient les coefficients  $w_{ij}$  associés à ce rayon. L'expression des  $w_{ij}$  dépend de la base de représentation choisie. Rappelons que dans le cas d'une base de pixels gaussiens, les  $w_{ij}$  dépendent uniquement de la distance rayon-pixel  $d_{ij}$  et sont donnés par :

$$w_{ij}(d_{ij}) = K e^{-\frac{d_{ij}^2}{2\sigma^2}} \sqrt{2\pi\sigma^2}$$

$H$  est de taille  $M \times N$ . Le modèle de mesure non bruitées est :

$$P = H\mu$$

Nous souhaitons comparer ce modèle pour deux bases différentes de représentation du milieu :

- La base usuelle des pixels carrés
- La base de pixels gaussiens

### 3.4.2 Méthodologie

Soit un milieu  $\mu(x, y)$  connu de façon exacte sur un compact de  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{R}^2$ . Le sinogramme de  $\mu(x, y)$  est :

$$P(\theta, t) = \int \mu(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) ds$$

Il sera discrétisé en  $P[n_t, n_\theta] = P[n_t \Delta t, n_\theta \Delta \theta]$ . La matrice résultante est ré arrangée sous la forme d'un vecteur  $P$  de taille  $M = N_t \times N_{theta}$ .

La grille d'échantillonnage du milieu est de taille  $I \times J = N$  avec  $I = J$ . On note  $c_{ij} = \mu(x_i, y_j)$ . Ces coefficients correspondent à ceux de la décomposition de  $\mu(x, y)$  sur la base des pixels carrés pour une résolution  $N$ . De la même façon, on définit les  $g_{ij}$  comme coefficients de la décomposition du milieu sur la base des gaussiennes, calculés par la méthode présentée en 3.2.4. Les  $g_{ij}$  et  $c_{ij}$  sont ré arrangés sous forme de vecteurs  $c$  et  $g$  de taille  $N$ . Les matrices de projection correspondant aux bases pixels carrés et gaussiens sont respectivement notées  $H_c$  et  $H_g$  et sont calculées à partir des méthodes présentées aux sections 2.2.2 et 2.4. Elles correspondent à la géométrie décrite par  $[n_t, n_\theta]$  et sont de taille  $M \times N$ . Nous allons comparer :

- $P$
- $P_c = H_c c$
- $P_g = H_g g$

pour différentes valeurs de la résolution  $N$ . Cela revient à comparer  $P(\theta, t)$  avec  $\sum_{1 \leq ij \leq N} \mu_{ij} \int b_{ij}(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) ds$  pour les bases  $b_{ij}(x, y)$  carrées et gaussiennes.

### 3.4.3 Mise en œuvre

Nous utilisons le milieu décrit en figure 3.26. Le modèle de mesures a pour paramètres  $N_t = 90$  détecteurs et  $N_\theta = 90$  angles de rotation soit  $M = 8100$ . Entre chaque série de mesures, nous multiplions  $N$  par 4, ce qui revient à subdiviser chaque pixel en 4 sous pixels.

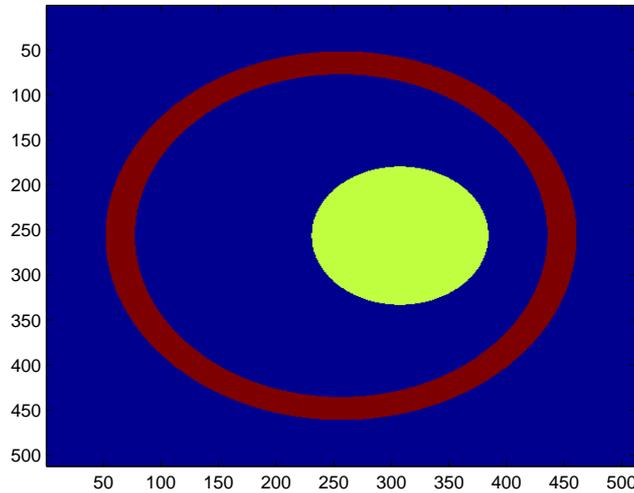


FIG. 3.26 – Milieu  $\mu(x, y)$

$\sqrt{N}$	10	20	40	80	160
Erreur sur $P_c$	0.424	0.3153	0.1622	0.0826	0.055
Erreur sur $P_g$	0.7724	0.3183	0.1573	0.0855	0.0536

TAB. 3.4 – Pour des images contenant  $N$  pixels , nous comparons  $\frac{\|P-P_c\|_2^2}{\|P\|_2^2}$  et  $\frac{\|P-P_g\|_2^2}{\|P\|_2^2}$

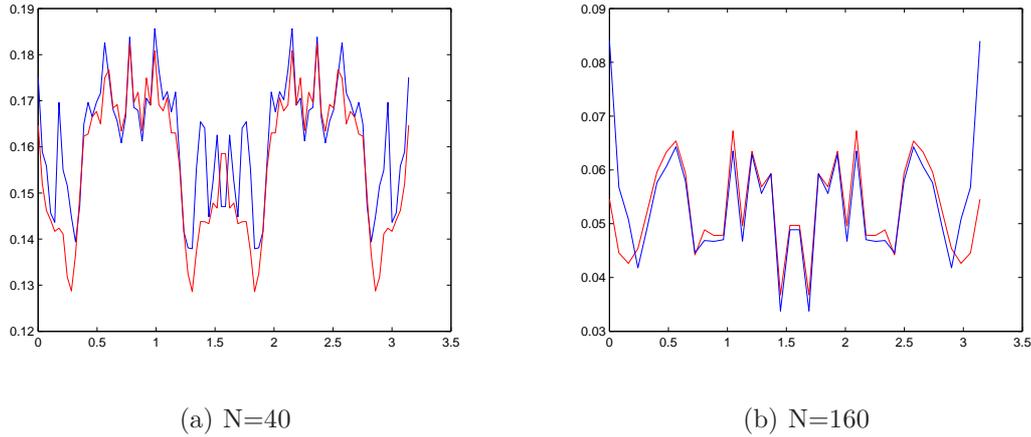


FIG. 3.27 – Nous avons regroupé les termes de  $P$  correspondant à  $\theta$  constant. Nous traçons ici  $\frac{\|P_\theta - P_{c_\theta}\|_2^2}{\|P_\theta\|_2^2}$  (bleu) et  $\frac{\|P_\theta - P_{g_\theta}\|_2^2}{\|P_\theta\|_2^2}$  (rouge) en fonction de  $\theta$

### 3.4.4 Analyse des résultats

Le tableau 3.4 permet d'évaluer l'influence de la résolution  $N$  sur les erreurs  $\epsilon_c(N) = \frac{\|P-P_c\|_2^2}{\|P\|_2^2}$  et  $\epsilon_g(N) = \frac{\|P-P_g\|_2^2}{\|P\|_2^2}$ . Celles-ci diminuent lorsqu'on augmente  $N$ . Elles tendent à s'annuler lorsque  $N$  tend vers l'infini (voir section 2.1). A la lecture du tableau, il semble que  $\epsilon_c(N)$  et  $\epsilon_g(N)$  convergent vers 0 avec la même vitesse.

Les figures 3.27(a) et (b) indiquent la dépendance en  $\theta$  de l'erreur de modélisation. Rappelons que  $\theta$  décrit l'inclinaison des faisceaux de rayons balayant l'objet. Nous voyons que l'erreur contenue dans le modèle pixels gaussiens est toujours inférieure à celle du modèle pixels carrés, et ceci quel que soit  $\theta$ . On remarque que  $\frac{\|P_\theta - P_{c_\theta}\|_2^2}{\|P_\theta\|_2^2}$  présente un pic en  $\theta = 0$  (ou  $\theta = \pi$ ). Cela correspond au cas où les rayons sont parallèles à la grille de pixels carrés. Dans ce cas, l'erreur due à la représentation sur une base de pixels est amplifiée (Voir figure 3.28). Cela n'est pas remarquable pour des bases de fonction à symétrie circulaire.

### 3.4.5 Conclusion

Notre objectif était de comparer :

- $P(\theta, t) = \int \mu(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) ds$
- $P_{discrete}(\theta, t) = \sum_{1 \leq i, j \leq N} \mu_{ij} \int b_{ij}(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) ds$

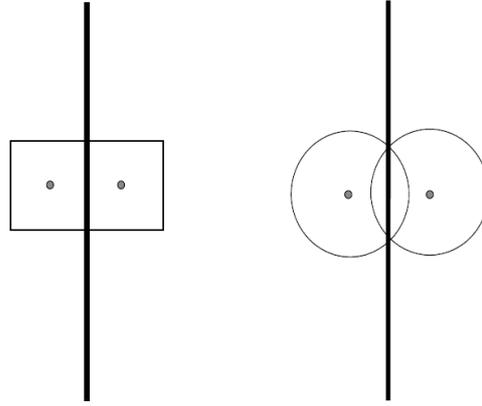


FIG. 3.28 – Dans le cas du modèle pixels carrés, si le rayon se situe entre 2 pixels, la pondération est la même que si deux rayons distincts traversaient chacun des pixels. Ce n'est pas le cas pour le modèle de pixels gaussiens.

Il semble que  $b_{ij}(x, y)$  gaussienne entraîne des erreurs du même ordre de grandeur que  $b_{ij}(x, y)$  base des pixels carrés. La convergence de  $P_{discrete}$  vers  $P$  est aussi rapide, et cela quel que soit l'angle  $\theta$ . L'erreur commise sur le calcul des  $\mu_{ij}$  dans le cas de la base gaussienne ne détériore pas les résultats. En conclusion, il apparaît que les deux bases fournissent des modèles de qualité équivalentes. Grâce à sa propriété de symétrie circulaire, le modèle pixels gaussiens permet un calcul simplifié de  $H$  et semble d'autre part moins sensible à l'angle d'inclinaison des rayons. Même si il paraît moins naturel que l'utilisation des pixels classiques, ce choix de base est donc à conseiller, notamment dans le cas de problèmes tridimensionnels.

### 3.5 Influence du choix de la base sur la reconstruction

Nous souhaitons comparer les résultats de reconstruction obtenus avec la base classique de pixels carrés et la base de pixels gaussiens. Nous utilisons les matrices de projections  $H_c$  et  $H_g$  construites pour un modèle de mesures de paramètres  $N_t = 90, N_\theta = 90$ . Le milieu  $\mu(x, y)$  est celui décrit en figure 3.26 et sera discrétisé avec une résolution  $N = 80 \times 80$  pixels. On ajoute un bruit gaussien aux données tel que le rapport signal à bruit soit de  $10dB$ .

On utilise l'algorithme L-BFGS décrit dans [2] où la fonction à minimiser est :

$$J(\mu) = J_1(\mu) + \lambda J_2(\mu)$$

avec

$$J_1(\mu) = J_1^{MC}(\mu) = \|P - H\mu\|_2^2 = (P - H\mu)^T (P - H\mu)$$

et

$$J_2(\mu) = \sum_{s,r} \phi(w_{s,r}(\mu_s - \mu_r))$$

Les hyper paramètres de la pénalisation sont :

- $\lambda = 1$
- $\phi(u) = \sqrt{u^2 + \delta^2} - u$
- $\delta = 0.1$
- $w(s, r) = 1$  pour  $s$  et  $r$  voisins horizontaux ou verticaux
- $w(s, r) = \sqrt{2}$  pour  $s$  et  $r$  voisins diagonaux

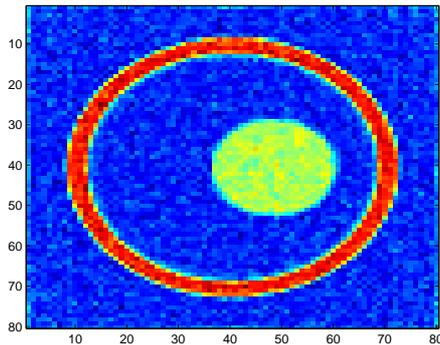
Nous utilisons ou non le changement de variable proposé par [15] afin d'estimer son impact sur les résultats obtenus.

Le dernier essai présenté illustre l'influence de la valeur de  $\lambda$  sur les images reconstruites. Les paramètres du modèle de mesure sont  $N_t = 100$  et  $N_\theta = 100$ . Le milieu est un fantôme de Shepp Logan. Pour construire  $H$ , on discrétise le milieu sur une grille de résolution  $120 \times 120$ . Les reconstructions sont effectuées sous contrainte de positivité.

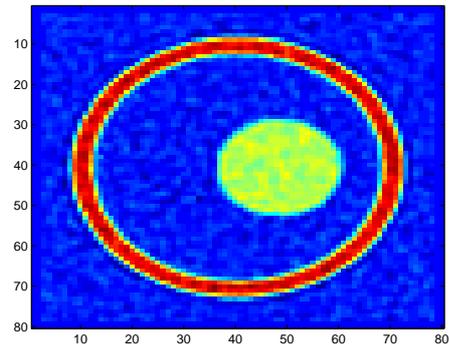
Lorsque la base choisie est celle des pixels gaussiens, l'image reconstruite correspond à une reprojektion de  $\sum \mu_{ij} b_{ij}(x, y)$  sur une grille de résolution  $N$ .

La qualité de la reconstruction sera évaluée par un critère de type norme 2 :  $\frac{J_1^{MC}(\mu_{rec})}{\|\mu\|_2^2}$

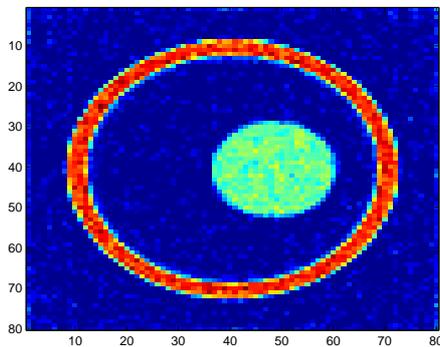
### 3.5.1 Résultats



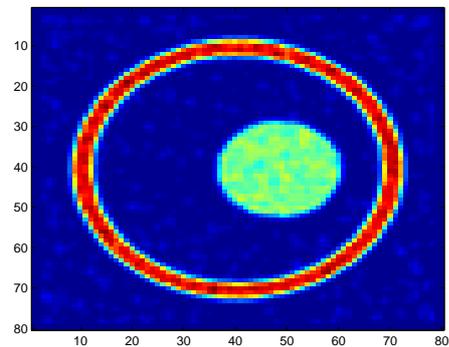
(a) Modèle pixels classiques carrés



(b) Modèle pixels gaussiens



(c) Modèle pixels classiques carrés -  
Contrainte de positivité



(d) Modèle pixels gaussiens -  
Contrainte de positivité

FIG. 3.29 – Images reconstruites

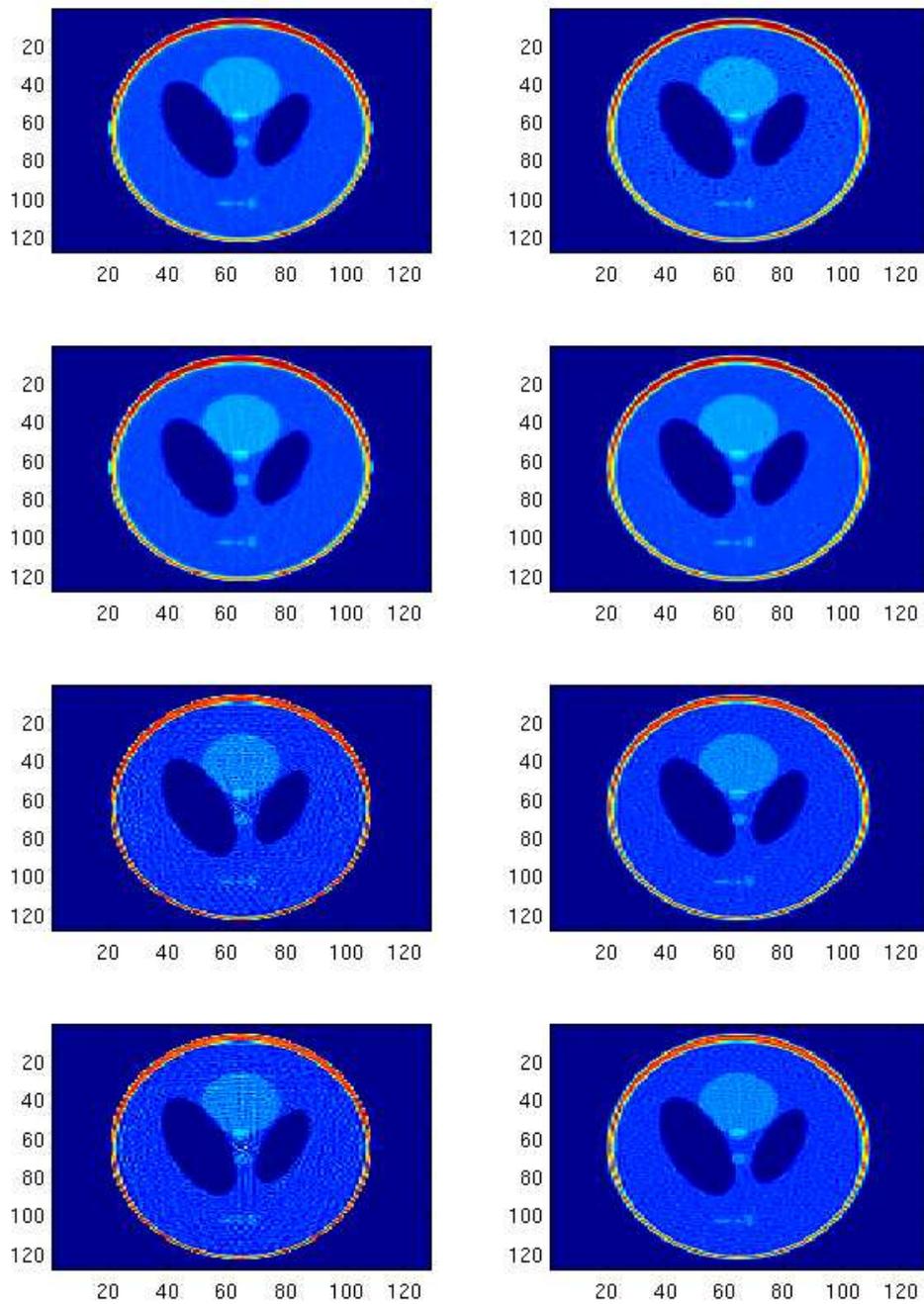


FIG. 3.30 – Colonne gauche : Modèle pixels carrés , colonne droite : Modèle pixels gaussiens . De haut en bas,  $\lambda = 10, 3, 1, 0$

Modèle	Pixels carrés	Pixels gaussiens
Pas de contrainte de positivité	0.1528	0.1232
Contrainte de positivité sur les $\mu_{ij}$	0.1362	0.1127

TAB. 3.5 – Valeur du critère  $\frac{J_1^{MC}(\mu_{rec})}{\|\mu\|_2^2}$  à l'issue de l'algorithme de reconstruction

### 3.5.2 Analyse des résultats

La qualité de la reconstruction est meilleure dans le cas de la base de gaussiennes. (Voir tableau 3.5). Visuellement, les images obtenues paraissent moins bruitées, en particulier au niveau de la zone d'absorption nulle (en bleu). (Voir différence entre les figures 3.29(a) et (b))

La contrainte de positivité améliore la qualité des images et semble diminuer le caractère bruité de l'image reconstruite sur la base de pixels carrés. (Voir différence entre les figures 3.29(a) et (c)).

Dans le cas de la base de gaussiennes, les images semblent plus lisses, presque floues. Cela est dû à la suppression des termes haute fréquence provoquée par la pénalisation. Il serait plus judicieux d'appliquer l'a priori sur les différences calculées sur la base de pixels carrés.

### 3.5.3 Facteur de détermination

On définit le facteur de détermination  $\zeta$  :

$$\zeta = \frac{\text{Nbre de lignes de } H}{\text{Nbre de colonnes de } H}$$

Plus  $\zeta$  est important, meilleurs sont les résultats. Il est apparu que l'utilisation de pixels gaussiens permettait d'arriver à des résultats similaires à ceux obtenus par le modèle pixels carrés, avec  $\zeta$  plus faible. Ceci s'explique par le fait que par exemple pour une valeur de  $FWHM = 1.5$ , la fonction de base  $b(x, y)$  a un support plus large que  $\Delta$  (largeur d'un pixel carré). De plus, les supports de fonctions de base voisines se superposent. (voir schéma figure 3.31)

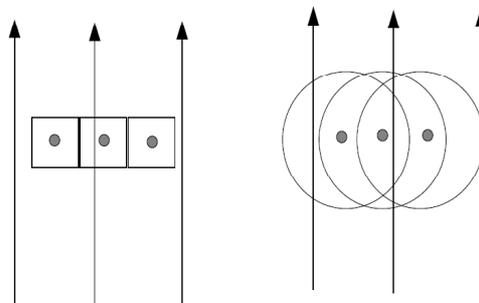


FIG. 3.31 – Même si les rayons sont espacés de  $\Delta_t > \Delta$ , ils traverseront tous les pixels gaussiens. La taille d'un pixel gaussien est environ  $1.5 FWHM$  et on choisit  $FWHM = 1.5\Delta$

## 3.6 Conclusion

Considérons un milieu  $\mu(x, y)$ . Dans ce chapitre, nous avons répondu aux problématiques suivantes :

- Pour une résolution  $N$  fixée, nous avons décrit une méthode de calcul rapide des coefficients  $\mu_{ij}$  décrivant  $\mu(x, y) = \sum \mu_{ij} b_{ij}(x, y)$  lorsque  $b_{ij}(x, y)$  est une fonction de base de type gaussienne.
- Pour  $\sigma$  de l'ordre de  $0.64\Delta$  (où  $\Delta$  est la distance verticale ou horizontale entre deux bases voisines), cette décomposition semble optimale.
- Nous avons comparé cette base avec la base de pixels classiques dans le cadre de la tomographie : Les deux bases sont équivalentes en terme de qualité de représentation. Le calcul de la matrice de projection est plus simple à implémenter dans la base de gaussiennes mais la matrice obtenue est moins creuse. Le modèle de projection obtenu est de qualité comparable à celui issu de la base de pixels classiques. Enfin, en terme de reconstruction, la base gaussienne semble donner de meilleurs résultats.



## Chapitre 4

# Prise en compte de l'épaisseur des faisceaux de rayons X

### 4.1 Introduction

Jusqu'à présent, pour des paramètres  $(\theta_i, t_i)$  donnés, nous avons supposé que le faisceau de rayon X qui traversait le milieu était infiniment mince. En réalité, ce n'est pas le cas. (Figure 4.1) En effet, la source ainsi que les détecteurs ont une certaine dimension non nulle, classiquement du même ordre de grandeur que celle d'un pixel. Si l'on affine la grille d'échantillonnage pour s'approcher du cas continu, l'approximation faite sur la taille des détecteurs et de la source n'est plus valide. Nous allons donc considérer qu'un détecteur capte un faisceau de rayons X d'épaisseur non nulle  $c$ .

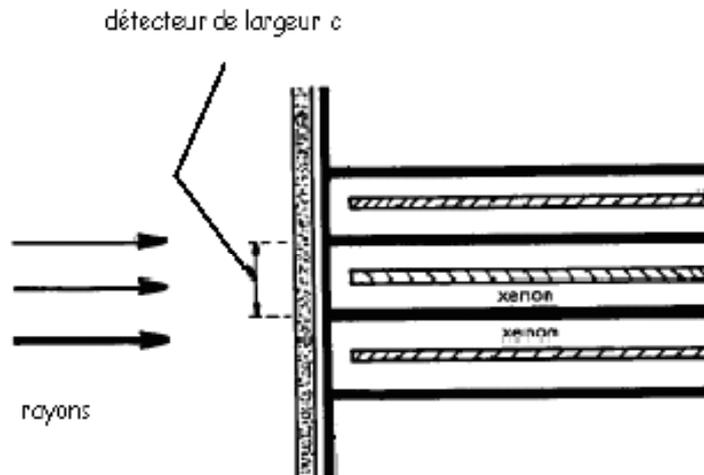


FIG. 4.1 – Schéma d'un détecteur de rayons X

Différentes approches dans la littérature proposent des modifications à apporter au modèle afin de prendre en compte cette épaisseur. Cependant, nous verrons qu'elles ne respectent pas la loi de Beer-Lambert. Notre objectif est d'exploiter les propriétés de la base gaussienne pour construire un nouveau modèle qui permettra de tenir compte de cette épaisseur tout en respectant la loi d'atténuation.

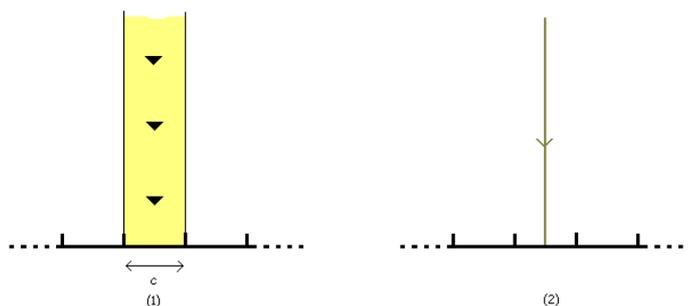


FIG. 4.2 – (1) : Faisceau de rayons X arrivant sur un détecteur d'épaisseur  $c$ . (2) : Modèle rayon mince, on suppose qu'un détecteur reçoit un unique rayon en son centre

## 4.2 Modification de la loi d'atténuation

Soit un faisceau de rayons X d'épaisseur  $c$  d'intensité uniforme traversant  $\mu$  le long du segment  $[a, b]$ . L'intensité du faisceau émergent est :

$$I = I_0 \frac{1}{c} \int_{t-\frac{c}{2}}^{t+\frac{c}{2}} e^{-\int_a^b \mu(s) ds} dl \quad (4.1)$$

Le terme  $\frac{1}{c}$  s'explique par le fait que si le milieu traversé a un coefficient d'atténuation nul, on doit avoir :

$$I = I_0$$

En reprenant les notations de la partie I,

$$I(t, \theta) = I_0 \frac{1}{c} \int_{t-\frac{c}{2}}^{t+\frac{c}{2}} e^{-P(l, \theta)} dl \quad (4.2)$$

On voit tout de suite que le problème direct ne peut plus s'écrire sous une forme linéaire. Remarquons aussi que dans l'équation (4.1), on ne fait pas de distinction entre la taille de la source et celle des détecteurs. Cela permet de supposer que le faisceau à une épaisseur constante le long de sa trajectoire.

## 4.3 Modification du critère à minimiser

Nous nous intéressons ici à la modification du critère d'adéquation aux données  $J_1(\mu)$  présenté en section 1.4.3 dans le cas où la taille des détecteurs est prise en compte. Nous distinguons deux types de critères :

- Le critère des moindres carrés  $J_1^{MC}(\mu)$
- Le critère  $J_1^P(\mu)$  basé sur une formulation statistique poissonnienne du problème

Si on néglige la taille des détecteurs, nous avons :

$$J_1^{MC}(\mu) = \|P - H\mu\|_2^2 = (P - H\mu)^T (P - H\mu)$$

et

$$J_1^P(\mu) = - \sum_{m=1}^M (P_m \log \bar{P}_m - \bar{P}_m)$$

avec

$$\bar{P}_m = (H\mu)_m = \sum_n h_{mn} \mu_n$$

Rappelons que les détecteurs mesurent des intensités. La relation entre les mesures d'intensité  $I(t, \theta)$  et les projections  $P(t, \theta)$  est :

$$P(t, \theta) = - \log \frac{I(t, \theta)}{I_0}$$

avec  $I_0$ , intensité du faisceau non atténué.

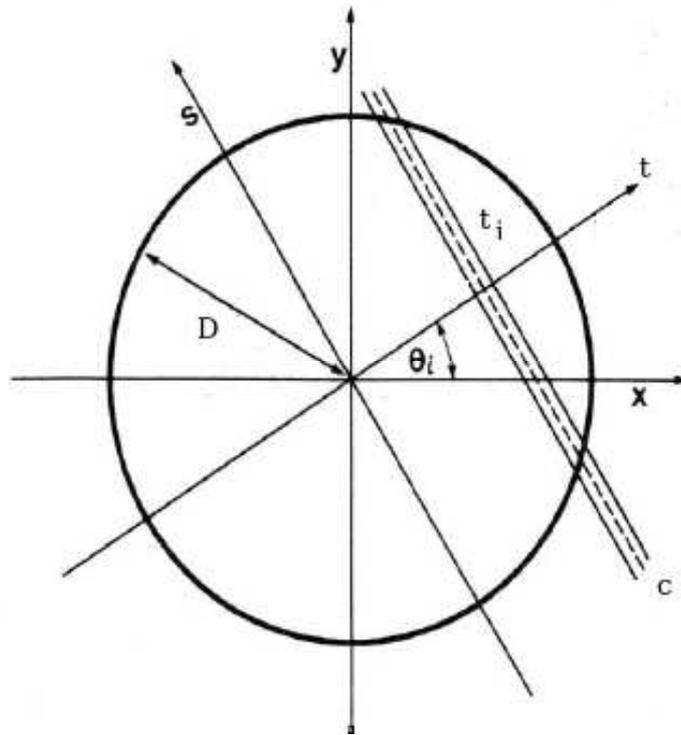


FIG. 4.3 – Le faisceau de rayons de paramètre  $(\theta_i, t_i)$  n'est pas infiniment mince. Il a une épaisseur  $c$

L'intensité mesurée par un détecteur de largeur  $c$  et de position  $(t, \theta)$  est donnée par :

$$I(t, \theta) = I_0 \frac{1}{c} \int_{t-\frac{c}{2}}^{t+\frac{c}{2}} e^{-\int \mu(s) ds} dl$$

Si on discrétise le milieu  $\mu$  sur une base de fonctions :

$$I(t, \theta) = I_0 \frac{1}{c} \sum_{k=1}^K \exp(-h^{(\tau(k), \theta)} T \mu)$$

avec :

- $h^{(\tau(k),\theta)}$  ligne de la matrice de projection  $H$  associée à un rayon de paramètres  $(\tau(k), \theta)$ .
- $\tau(k)$  varie de  $t - \frac{c}{2}$  à  $t + \frac{c}{2}$ , avec un pas  $\frac{c}{K}$

Si nous regroupons les mesures  $\frac{I_\theta(t)}{I_0}$  dans un vecteur  $Y$  de taille  $M$  (correspondant au nombre de positions angulaires par détecteurs  $N_\theta$  multiplié par le nombre de détecteurs  $N_t$ ), nous avons une formulation matricielle du modèle de génération des données :

$$\bar{Y} = \frac{1}{c} \sum_{k=1}^K e^{-H^{(k)}\mu}$$

où  $H^{(k)}$  est une matrice de ligne  $h^{(\tau(k),\theta)}$ , pour  $k = 1, \dots, K$ . Ce modèle n'est pas linéaire. Lorsque l'on prend en compte le caractère polychromatique des rayons X, le modèle de mesure est du même type que celui-ci ([15]). Le critère des moindres carrés devient :

$$J_1^{MC}(\mu) = \|Y - \bar{Y}\|_2^2 = \left\| Y - \frac{1}{c} \sum_{k=1}^K e^{-H^{(k)}\mu} \right\|_2^2$$

L'autre critère est basé sur un modèle probabiliste de la génération des données. On pose cette fois que les observations  $Y_m$  sont des variables aléatoires indépendantes distribuées par la loi de poisson :

$$Y_m \sim \text{Poisson}\left(\frac{1}{c} \sum_{k=1}^K e^{-[H^{(k)}\mu]_m}\right)$$

On a donc :

$$J_1^P(\mu) = - \sum_{m=1}^M (Y_m \log \bar{Y}_m - \bar{Y}_m)$$

avec

$$\bar{Y}_m = \frac{1}{c} \sum_{k=1}^K e^{-[H^{(k)}\mu]_m}$$

DeMan ([14]) propose un algorithme permettant de résoudre un problème très similaire, qui correspond à la prise en compte du caractère polychromatique des rayons X. Le critère à minimiser est très proche de  $J_1^P$  obtenu sous l'hypothèse de détecteurs larges. Une étude intéressante résiderait en une adaptation des méthodes présentées dans [14] à ce nouveau problème d'optimisation.

Afin de pouvoir utiliser les mêmes algorithmes de minimisation que ceux employés dans le cadre de l'hypothèse rayon mince, nous recherchons des modèles de la forme :

$$P = \tilde{H}\mu$$

où  $\tilde{H}$  est une matrice de projection 'modifiée' en tenant compte de la taille des détecteurs. La section 4.5 présente une méthode couramment utilisée permettant de linéariser le modèle de mesure. Nous en proposerons une nouvelle en 4.6.

#### 4.4 Génération de données simulant l'épaisseur du faisceau

Afin de comparer les modèles proposés avec des données exactes, nous devons élaborer une méthode permettant de générer des sinogrammes sous hypothèse de détecteurs larges. L'équation (4.2) ne sera

pas implantée directement. Même dans le cas de fantômes elliptiques, l'intégrale n'est pas calculable analytiquement de façon simple. Nous proposons ici plusieurs méthodes de simulation de l'équation (4.2).

#### 4.4.1 Discrétisation de l'équation (4.2)

##### 4.4.1.1 Méthode proposée par DeMan ([14])

Soit  $\Delta_s$  la taille de la source et  $\Delta_d$  la largeur d'un détecteur. Classiquement,  $\Delta_s = 0.6mm$  et  $\Delta_d = 1.2mm$  ([14]). La taille de la source et du détecteur sont modélisées en considérant des rayons infiniment minces échantillonnés à une résolution plus importante ( $\Delta = 0.1mm$ ) puis en sommant les atténuations résultantes sur la largeur d'un détecteur et celle de la source. Ceci est schématiquement représenté en figure 4.4.

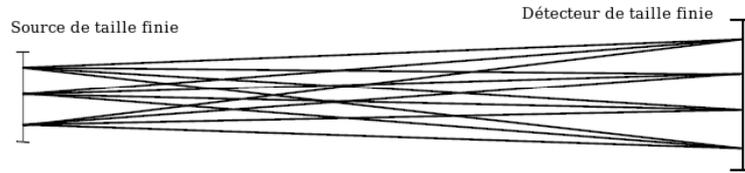


FIG. 4.4 – Méthode utilisée par DeMan pour générer des mesures de simulation tenant compte de la taille et de la source et du détecteur

Cette méthode permet de distinguer les grandeurs  $\Delta_d$  et  $\Delta_s$ .

Si  $\Delta_d = \Delta_s = c$ , et si l'on fait tendre le nombre d'échantillons vers l'infini, on obtient l'équation (4.1), la somme discrète se rapprochant de l'intégrale.

Nous ne retiendrons pas cette méthode car elle est assez lourde à implanter, le nombre de projections à calculer pour un angle et une direction donnée étant égal au produit entre le nombre d'échantillons sur le détecteur et le nombre d'échantillon sur la source.

##### 4.4.1.2 Produit de convolution

D'après la loi de Beer-Lambert, l'atténuation induite par un rayon de largeur  $dl$  est :

$$I(l) = I_0 \exp\left(-\int \mu(M) ds\right)$$

où  $M$  est un point situé sur le rayon à la cote  $s$ .

Considérons un rayon d'épaisseur  $c$ . Pour obtenir la valeur de  $I$ , il suffit maintenant d'intégrer la valeur de  $I$  sur la largeur du rayon, ce qui donne :

$$I(t) = \frac{1}{c} \int_{t-\frac{c}{2}}^{t+\frac{c}{2}} I_0 \exp\left(-\int \mu(M) ds\right) dl = \frac{1}{c} \int_{t-\frac{c}{2}}^{t+\frac{c}{2}} I(l) dl$$

Si on note

$$r_c(x) = \begin{cases} \frac{1}{c} & \text{si } |x| \leq \frac{c}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$I(t) = \int_l I(l) r_c(t-l) dl$$

Nous remarquons que la largeur des rayons peut être prise en compte en convoluant les mesures d'atténuation par une fenêtre rectangulaire.

**Remarque :**

La transformée de Fourier de cette fenêtre est donnée par :

$$R_c(w) = \text{sinc}(w c/2)$$

Dans le domaine fréquentiel, la transformée de Fourier de l'atténuation exacte est multipliée par cette fonction. Les mesures d'atténuation passent à travers un filtre passe-bas. Le premier zéro de  $R_c(w)$  est situé en  $2\pi/c$ . L'effet d'un rayon épais est donc assimilable à un filtrage des fréquences supérieures à  $2\pi/c$ .

#### 4.4.1.3 Méthode retenue

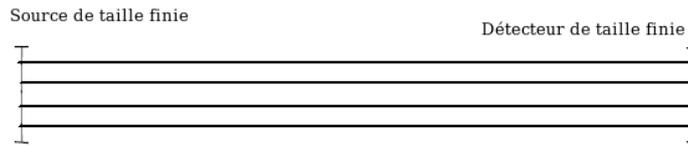


FIG. 4.5 – Méthode retenue pour générer des mesures de simulation tenant compte de la taille et de la source et du détecteur

Cette fois-ci, l'équation (4.2) est approchée par :

$$\frac{I(t, \theta)}{I_0} = \frac{1}{c} \sum_{l_i \in [t-\frac{c}{2}, t+\frac{c}{2}]} \exp(-P(l_i, \theta)) \quad i = 1, \dots, N_e$$

Lorsque  $N \rightarrow \infty$ , on retrouve l'équation (4.1) :

$$I(t, \theta) = I_0 \frac{1}{c} \int_{t-\frac{c}{2}}^{t+\frac{c}{2}} e^{-P(l, \theta)} dl$$

#### 4.4.2 Faisceau mince traversant un fantôme de Shepp et Logan

Classiquement, les données de simulations sont obtenues à partir d'une image appelée 'fantôme de Shepp et Logan'. Ce fantôme est constitué d'une superposition d'ellipses de différentes tailles, inclinaisons et intensités.

Soit  $e(x, y)$  une ellipse uniforme de largeur  $A$  et de hauteur  $B$ , centrée en  $(0, 0)$  et inclinée de  $0^\circ$  soit :

$$e(x, y) = \begin{cases} \rho & \text{pour } \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La projection  $P(t, \theta)^\alpha$  à l'angle  $\theta$  d'une ellipse uniforme centrée en  $(x_1, y_1)$  et inclinée d'un angle  $\alpha$  est donnée par :

$$P(t, \theta)^\alpha = P(t - s \cos(\lambda - \theta), \theta - \alpha)^{0^\circ}$$

où  $s = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ ,  $\lambda = \tan^{-1}(y_1/x_1)$ ,

$$P(t, \theta)^{0^\circ} = \begin{cases} \frac{2\rho AB}{a^2(\theta)} \sqrt{a^2(\theta) - t^2} & |t| \leq a(\theta) \\ 0 & |t| > a(\theta) \end{cases}$$

et  $a^2(\theta) = A^2 \cos(\theta)^2 + B^2 \sin(\theta)^2$ .

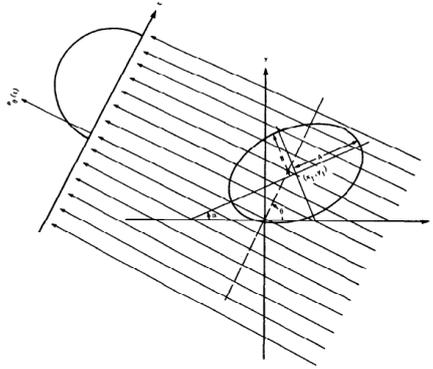


FIG. 4.6 – Calcul exact de la transformée de Radon d'une ellipse ([11])

Le fantôme est constitué d'une somme d'ellipses. Par linéarité de la transformée de Radon, la projection totale est égale à la somme de la projection de chaque ellipse. L'intérêt de l'utilisation du fantôme de Shepp et Logan est que l'image utilisée pour construire les projections est connue de façon continue. Les projections obtenues ne contiennent donc pas d'erreurs dues à l'échantillonnage de l'image. Pour se rapprocher du cas réel, les projections seront calculées pour un nombre fini d'angles  $N_\theta$  et de détecteurs  $N_t$ . Les données constituant un sinogramme de l'image sont stockées dans un vecteur  $P$  de taille  $N_\theta N_t = M$ .

## 4.5 Approximation classique rencontrée dans la littérature

Dans cette section, nous présentons une méthode classique proposant une modification du modèle prenant en compte de l'épaisseur des faisceaux. Cette méthode que nous appellerons 'pondération par l'aire' est présentée dans de nombreux articles ([7], [24], [22], [19]). Il existe une autre méthode dite de l'angle solide ([21], [18] et [22]). Elle est apparue plus tard et est plus liée à la technologie TEP. A notre connaissance, il n'existe aucune méthode respectant l'équation (4.1).

### 4.5.1 Présentation

La méthode de pondération par l'aire consiste à supposer que, dans le cas de faisceaux d'épaisseur  $c$ , la projection est donnée par :

$$P(t, \theta)^c = \frac{1}{c} \int_{t-\frac{c}{2}}^{t+\frac{c}{2}} P(l, \theta) dl \quad (4.3)$$

Cela revient à déplacer le signe intégrale de l'équation (4.1) à l'intérieur de l'exponentielle. Le modèle utilise donc une écriture erronée de la loi de Beer-Lambert. Cependant, une telle formulation permet une formulation linéaire du problème direct.

Soit  $b(x, y)$  la base de fonctions utilisée pour représenter le milieu. Nous avons vu que dans le cas de rayons minces, la projection d'un faisceau faisant un angle  $\theta$  avec l'axe  $y$  est donnée par :

$$P(t, \theta) = -\ln \frac{I(t, \theta)}{I_0} = \int_{L_{t, \theta}} \mu(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) ds$$

En utilisant l'équation (4.3), on en déduit la projection du même faisceau mais d'épaisseur  $c$  :

$$P(t, \theta)^c = \frac{1}{c} \int_{t-\frac{c}{2}}^{t+\frac{c}{2}} \int_{L_{l, \theta}} \mu(l \cos \theta - s \sin \theta, l \sin \theta + s \cos \theta) ds dl$$

Soit :

$$P(t, \theta)^c = \sum_{ij} \mu_{ij} \frac{1}{c} \int_{t-\frac{c}{2}}^{t+\frac{c}{2}} \int_{L_{l, \theta}} b_{ij}(l \cos \theta - s \sin \theta, l \sin \theta + s \cos \theta) ds dl = \sum_{ij} \mu_{ij} w_{ij}$$

On obtient donc une nouvelle formulation du problème direct :

$$P = H\mu$$

où la matrice  $H$  contient les coefficients de pondération  $w_{ij}$  définis par :

$$w_{ij} = \frac{1}{c} \int_{t-\frac{c}{2}}^{t+\frac{c}{2}} \int_{L_{l, \theta}} b_{ij}(l \cos \theta - s \sin \theta, l \sin \theta + s \cos \theta) ds dl$$

On parle de 'pondération par l'aire' car les  $w_{ij}$  correspondent à l'aire d'intersection entre le faisceau épais et la fonction de base  $b_{ij}$ .

### 4.5.2 Evaluation de l'erreur commise par le non respect de la loi de Beer-Lambert

On considère le détecteur placé entre  $t_0$  et  $t_1$ . Dans le modèle rayon mince, on suppose que le détecteur mesure  $I = I_0 \exp(-p(\frac{t_0+t_1}{2}))$ . L'erreur commise est faible dans le cas où  $c$  est petit car alors  $p(t_1) \approx p(t_0)$ . Cependant, le modèle de mesure exact est :

$$I = I_0 \frac{1}{c} \int_{t_0}^{t_1} \exp(-p(t)) dt$$

Nous souhaitons comparer ce modèle exact avec celui utilisé en pratique, qui considère que :

$$I = I_0 \exp \frac{1}{c} \int_{t_0}^{t_1} (-p(t)) dt$$

Il est équivalent de comparer :

- $f = -\ln \int_{t_0}^{t_1} \exp(-p(t)) dt + \ln c$
- $g = \frac{1}{c} \int_{t_0}^{t_1} p(t) dt$

On souhaite comparer  $f$  et  $g$  pour différentes fonctions  $p(t)$ .

#### 4.5.2.1 $p(t)$ échelon

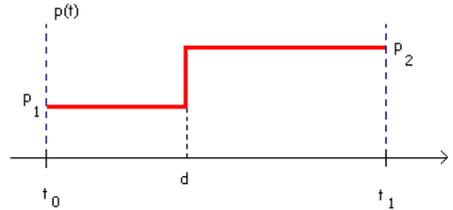


FIG. 4.7 –  $p(t)$  passe de façon discontinue de  $p_1$  à  $p_2$  entre  $t_0$  et  $t_1$ . La discontinuité intervient en  $t = d$ .

$$p(t) = p_1 \quad \text{pour } t \in [t_0, d]$$

$$p(t) = p_2 \quad \text{pour } t \in [d, t_1]$$

$$f = -\ln((t_0 + d)e^{-p_1} + (t_1 - t_0 - d)e^{-p_2}) + \ln c$$

Sans perte de généralités, on peut supposer que  $t_0 = 0$  et  $t_1 = c$  soit :

$$f = -\ln(de^{-p_1} + (c - d)e^{-p_2}) + \ln c$$

et :

$$g = \frac{1}{c} dp_1 + (c - d)p_2$$

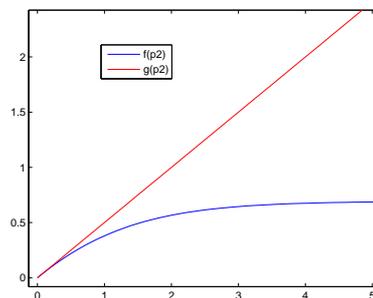


FIG. 4.8 – comparaison de  $f(p_2)$  (bleu) et  $g(p_2)$  (rouge) pour  $p_1 = 0, c = 1$  et  $d = 0.5$

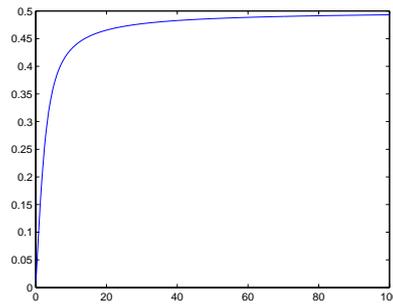


FIG. 4.9 – Erreur relative  $\frac{|f(p_2) - g(p_2)|}{p_2}$

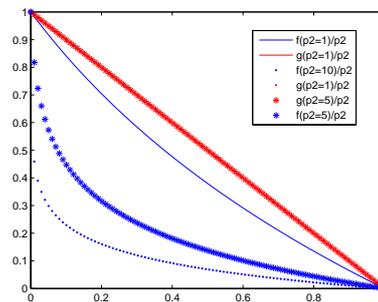


FIG. 4.10 – comparaison de  $f(d)$  (bleu) et  $g(d)$  (rouge) pour  $p_1 = 0, c = 1$  et différentes valeurs de  $p_2$

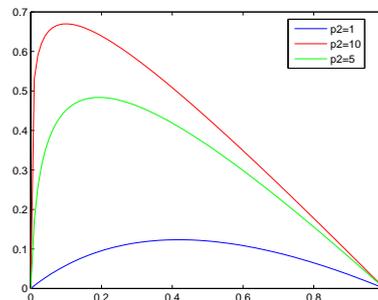


FIG. 4.11 – Erreur relative  $\frac{|f(d) - g(d)|}{p_2}$  pour  $p_1 = 0, c = 1$ , et différentes valeurs de  $p_2$

#### 4.5.2.2 Analyse des résultats

Les figures 4.8 et 4.9 permettent d'évaluer la différence entre  $f$  et  $g$  en fonction de  $p_2$ , les autres paramètres étant fixés. Nous voyons que cette différence augmente avec  $p_2$ . L'erreur commise par la pondération par l'aire semble se stabiliser autour d'une valeur d'environ 50%. Le cas d'une discontinuité de  $p(t)$  est courant. Il a lieu lorsqu'il y a des éléments avec des coefficients d'absorptions différents dans l'objet. Concrètement, une discontinuité dans l'objet  $\mu(x, y)$  résultera d'une discontinuité dans sa transformée de Radon. Afin d'évaluer l'importance de l'erreur commise par la pondération par l'aire, il nous faudrait connaître un ordre de grandeur de l'amplitude de  $\mu(x, y)$  pour les différents matériaux rencontrés.

Les figures 4.10 et 4.11 permettent d'évaluer l'influence de la position relative  $d$  de la discontinuité par rapport à la position du détecteur. Nous avons donc évalué la différence entre  $f$  et  $g$  en fonction de  $d$ , pour différentes valeurs de  $p_2$ . Cette différence s'annule en  $d = 0$  et  $d = c$ , car ces cas correspondent à  $p(t)$  constante. L'erreur dépend de  $d$  et atteint son maximum en une valeur  $d_{max}$  qui dépend de  $p_2$ . Lorsque  $p_2$  augmente,  $d_{max}$  se rapproche de  $d = 0$ . De plus,  $\frac{|f(d_{max}) - g(d_{max})|}{p_2}$  croît avec  $p_2$ . L'erreur est plus importante si la discontinuité est éloignée du bord du détecteur.

#### 4.5.2.3 $p(t)$ linéaire

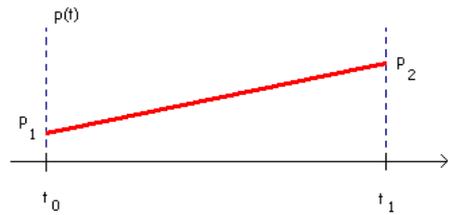


FIG. 4.12 –  $p(t)$  passe de façon linéaire de  $p_1$  à  $p_2$  entre  $t_0$  et  $t_1$

$$p(t) = p_1 + t \frac{p_2 - p_1}{c}$$

en supposant  $t_0 = 0$  et  $t_1 = c$ .

On obtient :

$$f = -\ln\left(\frac{e^{-p_1} - e^{-p_2}}{p_2 - p_1}\right)$$

et :

$$g = \frac{p_1 + p_2}{2}$$

Le résultat ne dépend pas de  $c$  mais uniquement des valeurs  $p_1$  et  $p_2$ .

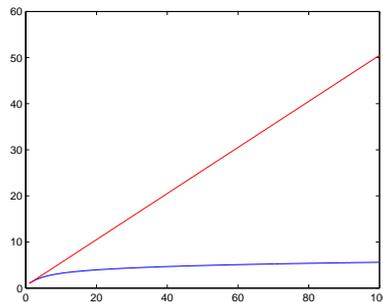


FIG. 4.13 – comparaison de  $f(p_2)$  (bleu) et  $g(p_2)$  (rouge) pour  $p_1 = 0$  et  $c = 1$

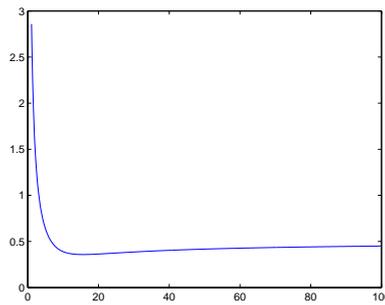


FIG. 4.14 – Erreur relative  $\frac{|f(p_2) - g(p_2)|}{p_2}$

#### 4.5.2.4 Analyse des résultats

Notons que la pondération par l'aire dans le cas  $p(t)$  linéaire donne la même valeur que celle obtenue sous l'hypothèse d'un rayon mince frappant le détecteur en son centre :

$$g = p\left(\frac{c}{2}\right)$$

Nous comparons ici  $f$  et  $g$  en modifiant uniquement  $p_2$ . Cela revient à jouer sur la pente de  $p(t)$  car  $p_1$  est fixée. Nous remarquons que la différence entre les deux modèles augmente avec  $p_2$ . Cette différence est nulle lorsque  $p_2 = p_1$  car on retombe dans le cas  $p(t)$  constante. Cependant, les fonctions  $f(p_2)$  et  $g(p_2)$  ne sont pas équivalentes en  $p_2 \ll 1$  :

Supposons que  $p_1 = 0$  et que  $p_2 = x \ll 1$ . Alors :

$$f(x) = -\ln\left(\frac{1 - e^{-x}}{x}\right) \sim x$$

et

$$g(x) = \frac{x}{2}$$

#### 4.5.2.5 $p(t)$ gaussienne

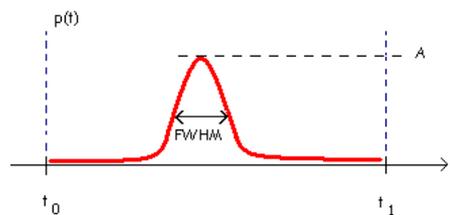


FIG. 4.15 –  $p(t)$  suit une distribution gaussienne entre  $t_0$  et  $t_1$

On suppose, afin de centrer  $p(t)$ , que  $t_0 = -\frac{c}{2}$  et  $t_1 = \frac{c}{2}$

$$p(t) = Ae^{-\frac{t^2}{\sigma^2}}$$

La distribution  $p$  est paramétrée par son amplitude maximale  $A$  et son écart type  $\sigma$ . On obtient :

$$g = \frac{A\sigma}{c} \sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{c}{2\sigma}\right)$$

On évaluera

$$f = -\ln \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \exp(-Ae^{-\frac{t^2}{\sigma^2}}) + \ln c$$

par la fonction `quadv` de *MATLAB*.

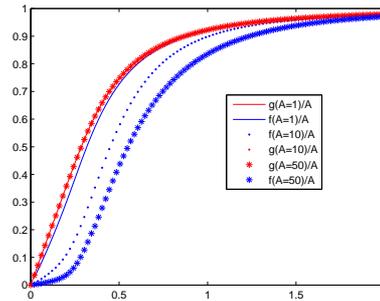


FIG. 4.16 – comparaison de  $f(\sigma)/A$  (bleu) et  $g(\sigma)/A$  (rouge) pour  $A = 1$  (trait continu),  $A = 10$  (points) et  $A = 50$  (étoiles)

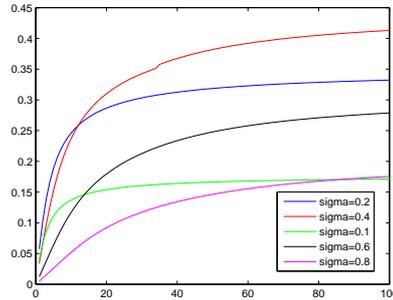


FIG. 4.17 – Erreur relative  $\frac{|f(A)-g(A)|}{A}$  pour différentes valeurs de  $\sigma$

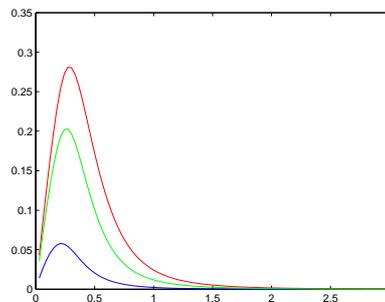
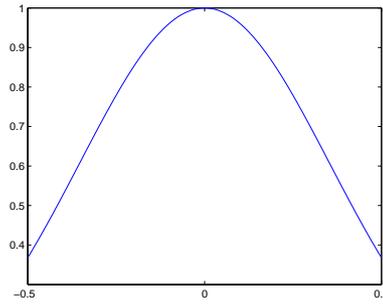


FIG. 4.18 – Erreur relative  $\frac{|f(\sigma)-g(\sigma)|}{A}$  pour  $A = 1$ (bleu),  $A = 5$ (vert) et  $A = 10$ (rouge)

FIG. 4.19 –  $p(t)$  pour  $\sigma = 0.5$ 

#### 4.5.2.6 Analyse des résultats

Cette distribution de forme gaussienne peut modéliser le cas où le milieu projeté contient un très petit objet, de taille du même ordre que la largeur d'un détecteur. Dans ce cas, nous avons étudié l'influence de l'amplitude  $A$  de la gaussienne ainsi que de son écart type  $\sigma$  sur l'erreur de modèle. Nous remarquons sur les figures 4.16 et 4.17 que cette erreur croît avec  $A$  jusqu'à se stabiliser en une valeur qui dépend de  $\sigma$ . La figure 4.18 montre que pour une amplitude  $A$  fixée, l'erreur de modèle est maximale en une valeur de  $\sigma$  qui dépend de  $A$ . Cette valeur est de l'ordre de  $\sigma = 0.5$ , ce qui correspond à une distribution  $p(t)$  illustrée en figure 4.19.

#### 4.5.3 Conclusion

Ces essais montrent que la pondération par l'aire entraîne des erreurs importantes notamment dans certains cas particuliers :

- Objet petit par rapport à la largeur du détecteur
- Objet entraînant une variation locale de  $p(t)$  importante

Nous allons tenter de corriger ce modèle afin de diminuer ces erreurs dues à une mauvaise description de la génération des données.

### 4.6 Approximation d'ordre 2

Nous souhaitons obtenir une expression approchée de l'équation (4.2) pour des faibles valeurs de  $c$ . Notre objectif est de développer un modèle plus proche de l'équation (4.1) que celui proposé par la pondération par l'aire, et si possible aussi simple (idéalement linéaire).

Nous fixons  $\theta$  et nous posons :

$$\psi(t) = \frac{1}{c} \int_{t-\frac{c}{2}}^{t+\frac{c}{2}} e^{-p(l)} dl$$

sous l'hypothèse  $c \ll 1$ . Notons  $\phi(l) = e^{-p(l)}$ . Nous allons exploiter un développement limité à l'ordre 2 de  $\phi$  en  $l = t$  :

$$\phi(l) = \phi(t) + (l-t)\phi'(t) + \frac{(l-t)^2}{2}\phi''(t)$$

Soit :

$$\psi(t) = \frac{1}{c} \int_{t-\frac{c}{2}}^{t+\frac{c}{2}} \phi(l) dl = \phi(t) + \frac{c^2}{24} \phi''(t)$$

En remplaçant  $\phi$  par son expression  $\phi(l) = e^{-p(l)}$  :

$$\psi(t) = e^{-p(t)} \left( 1 + \frac{c^2}{24} (p'^2(t) - p''(t)) \right)$$

Nous pouvons alors utiliser l'expression analytique de  $p(t) = R\mu(x, y)$  (où  $R$  est l'opérateur de Radon) afin d'exprimer les termes  $p'(t)$  et  $p''(t)$  :

$$\psi(t) \simeq \exp \left\{ - \int \mu(s, t_0) ds \right\} \left[ 1 + \frac{c^2}{24} \left( \left( \int \frac{\partial}{\partial t} \mu(s, t_0) ds \right)^2 - \int \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mu(s, t_0) ds \right) \right] \quad (4.4)$$

En supposant que le terme entre crochets est de la forme  $1 + x$  avec  $x \ll 1$ , on peut écrire :

$$\psi(t) \simeq \exp \left\{ - \int \mu(s, t_0) ds + \frac{c^2}{24} \left( \left( \int \frac{\partial}{\partial t} \mu(s, t_0) ds \right)^2 - \int \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mu(s, t_0) ds \right) \right\} \quad (4.5)$$

#### 4.6.1 Analyse de l'équation obtenue

Nous voyons que les dérivées premières et secondes de  $\mu$  apparaissent dans les nouvelles équations. Dans le cas d'un milieu discrétisé, ces dérivées pourront être écrites sous forme linéarisées. Cependant, nous remarquons l'apparition d'un terme non linéaire  $(\int \frac{\partial}{\partial t} \mu(s, t_0) ds)^2$  dans ce développement limité. Il nous faudra évaluer l'importance relative de ce terme devant les autres termes de l'équation. Enfin, l'approximation  $e^x \sim 1 + x$  est non justifiée. Pour des petites valeurs de  $c$ , il est possible qu'elle soit vérifiée mais là encore, il faudra évaluer le bien fondé d'une telle approximation.

## 4.7 Cas d'un milieu décomposé sur une base de pixels gaussiens

Nous souhaitons expliciter l'équation (4.5) dans le cas où le milieu est décomposé sur une base de pixels gaussiens. Nous espérons que des simplifications interviennent notamment dans le terme contenant les dérivées premières et secondes du milieu.

### 4.7.1 Développement limité

Le milieu  $\mu(x, y)$  est décrit sur la base de pixels gaussiens :

$$\mu(x, y) = \sum_{ij} \mu_{ij} b(x - x_i, y - y_j) \quad \text{avec} \quad b(x, y) = K e^{-\left(\frac{x^2}{2\sigma^2} + \frac{y^2}{2\sigma^2}\right)}$$

Nous allons exprimer les différents termes qui apparaissent dans l'équation (4.5) :

Notons  $d_{ij} = t_0 - y_j \sin(\theta_0) - x_i \cos(\theta_0)$  la distance entre un pixel  $(x_i, y_j)$  et un rayon d'inclinaison  $\theta_0$  situé à une distance  $t_0$ . Alors les dérivées partielles de  $\mu$  suivant  $t$ , direction normale au rayon (voir notations en figures 1.4 et 2.3), s'expriment par :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t}(x, y) = \sum_{ij} \mu_{ij} \frac{\partial}{\partial t} b_{ij}(x, y)$$

avec

$$\frac{\partial}{\partial t} b_{ij}(x, y) = -\frac{1}{\sigma^2} d_{ij} b_{ij}(x, y)$$

De même :

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial t^2}(x, y) = \sum_{ij} \mu_{ij} \frac{\partial^2}{\partial t^2} b_{ij}(x, y)$$

avec

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} b_{ij}(x, y) = \left(-\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^4} d_{ij}^2\right) b_{ij}(x, y)$$

**Remarque :**

Notons bien qu'il s'agit de la dérivée de  $\mu$  le long d'une direction définie par le rayon.  $d_{ij}$  dépend de  $t_0$  et  $\theta_0$ .

On peut ensuite exprimer les intégrales en utilisant la définition de  $w_{ij}$  :

$$\int \frac{\partial \mu}{\partial t}(s, t_0) ds = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{ij} \mu_{ij} d_{ij} \int b_{ij}(s, t_0) ds = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{ij} \mu_{ij} d_{ij} w_{ij}(d_{ij})$$

et

$$\int \frac{\partial^2 \mu}{\partial t^2}(s, t_0) ds = \sum_{ij} \mu_{ij} \left(-\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^4} d_{ij}^2\right) \int b_{ij}(s, t_0) ds = \sum_{ij} \mu_{ij} \left(-\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^4} d_{ij}^2\right) w_{ij}(d_{ij})$$

L'atténuation subie par un rayon distant de  $t_0$  d'épaisseur  $c$  sera donc estimée par :

$$I(t_0, \theta_0) \simeq I_0 e^{-\sum_{ij} \mu_{ij} w_{ij}} \left( 1 + \frac{c^2}{24} \left[ \left(-\frac{1}{\sigma^2} \sum_{ij} \mu_{ij} d_{ij} w_{ij}\right)^2 - \sum_{ij} \mu_{ij} \left(-\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^4} d_{ij}^2\right) w_{ij} \right] \right) \quad (4.6)$$

En utilisant l'approximation  $1 + x \simeq e^x$ , on obtient l'estimation suivante :

$$I(t_0, \theta_0) \simeq I_0 \exp \left\{ -\sum_{ij} \mu_{ij} w_{ij} + \frac{c^2}{24} \left[ \left(-\frac{1}{\sigma^2} \sum_{ij} \mu_{ij} d_{ij} w_{ij}\right)^2 - \sum_{ij} \mu_{ij} \left(-\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^4} d_{ij}^2\right) w_{ij} \right] \right\} \quad (4.7)$$

#### 4.7.2 Formulation vectorielle

Notons  $h_{t_0, \theta_0}$  la ligne de la matrice  $H$  correspondant au rayon considéré,  $h$  est un vecteur de taille  $N^2$  et contient les termes  $w_{ij}$ . De même, notons  $d_{t_0, \theta_0}$ , de taille  $N^2$ , le vecteur contenant les  $d_{ij}$  pour le même rayon. Enfin,  $\mu$  est le vecteur contenant les coefficients  $\mu_{ij}$  de la décomposition de  $I$  sur la base.

On a alors :

$$I(t_0, \theta_0) \simeq I_0 \exp \left( \left(\frac{c^2}{24\sigma^2} - 1\right) h^t \mu + \frac{c^2}{24\sigma^4} ((h \circ d)^t \mu)^2 - \frac{c^2}{24\sigma^4} (h \circ d \circ d)^t \mu \right)$$

en notant  $a \circ b$  le produit terme à terme des vecteurs  $a$  et  $b$ .

**Notations :**

- $Y = \left[\frac{I_{t_0, \theta_0}}{I_0}\right]$  vecteur de taille  $M$  regroupant les mesures  $\frac{I}{I_0}$
- $D = [d_{t_0, \theta_0}]$  matrice de taille  $M \times N^2$  regroupant les vecteurs  $d = [d_{ij}]$  de taille  $N^2$
- $H = [h_{t_0, \theta_0}]$  matrice de taille  $M \times N^2$  regroupant les vecteurs  $h = [w_{ij}]$  de taille  $N^2$

Alors :

$$Y = \exp\left(\left(\left(\frac{c^2}{24\sigma^2} - 1\right)H - \frac{c^2}{24\sigma^4}(H \circ D \circ D)\right)\mu + \frac{c^2}{24\sigma^4}((H \circ D)\mu) \circ ((H \circ D)\mu)\right) \quad (4.8)$$

en notant  $A \circ B$  le produit terme à terme des matrices  $A$  et  $B$ .

Dans le cas où le terme non linéaire  $\frac{c^2}{24\sigma^4}((H \circ D)\mu) \circ ((H \circ D)\mu)$  est petit, nous avons un modèle linéaire :

$$Y = \exp(-\tilde{H}\mu)$$

avec

$$\tilde{H} = \left(\frac{c^2}{24\sigma^2} - 1\right)H - \frac{c^2}{24\sigma^4}(H \circ D \circ D)$$

### 4.7.3 Vérification des hypothèses réalisées lors de la construction de ce nouveau modèle

Rappelons les hypothèses sur lesquelles se base le modèle proposé :

1.  $c \ll 1$
2.  $e^x \simeq \mathbf{1} + x$  pour  $x = \frac{c^2}{24\sigma^4} [((H \circ D)\mu) \circ ((H \circ D)\mu) - (H \circ D \circ D)\mu] + \frac{c^2}{24\sigma^2}H\mu$
3.  $\frac{c^2}{24\sigma^4}((H \circ D)\mu) \circ ((H \circ D)\mu)$  petit devant  $\left(\left(\frac{c^2}{24\sigma^2} - 1\right)H - \frac{c^2}{24\sigma^4}(H \circ D \circ D)\right)\mu$

$\mathbf{1}$  représente ici le vecteur de taille  $N$  rempli de 1. De plus  $e^x$  est le vecteur de taille  $N$  de terme général  $e^{x_i}$ .

Nous nous plaçons dans le cas  $N = 50 \times 50$  pixels et  $M = 50 \times 50$  mesures.

Nous traçons en fonction de  $c$  :

$$\begin{aligned} & - \frac{\|\mathbf{1} + X - e^X\|_2}{\|\mathbf{1} + X\|_2} \\ & - \frac{\|\text{NONLIN}\|_2}{\|\text{NONLIN} + \text{LIN}\|_2} \end{aligned}$$

avec :

$$X = \frac{c^2}{24\sigma^4} [((H \circ D)\mu) \circ ((H \circ D)\mu) - (H \circ D \circ D)\mu] + \frac{c^2}{24\sigma^2}H\mu$$

$$\text{LIN} = \left(\left(\frac{c^2}{24\sigma^2} - 1\right)H - \frac{c^2}{24\sigma^4}(H \circ D \circ D)\right)\mu$$

$$\text{NONLIN} = \frac{c^2}{24\sigma^4}((H \circ D)\mu) \circ ((H \circ D)\mu)$$

Sur la figure 4.21, nous remarquons que l'erreur faite en négligeant le terme non linéaire dans le modèle tend à se stabiliser. Le terme non linéaire représente environ 6% de LIN + NONLIN et ce taux augmente lentement avec  $c$ .

D'autre part, nous voyons que l'approximation  $e^x \simeq \mathbf{1} + x$  devient erronée lorsque  $c$  augmente (Figure 4.20). L'erreur commise s'accroît rapidement avec  $c$  (à cause du terme en  $c^2$ ).

Lors de l'utilisation de notre modèle, il faudra donc être vigilant à ne pas avoir un rapport taille de pixel - taille de détecteur trop faible. Nous ne pourrions donc pas reconstruire des images avec une haute résolution.

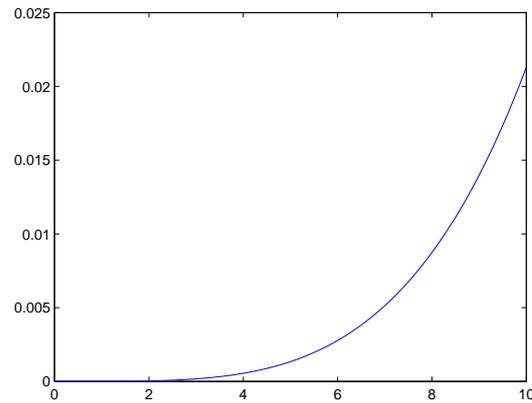
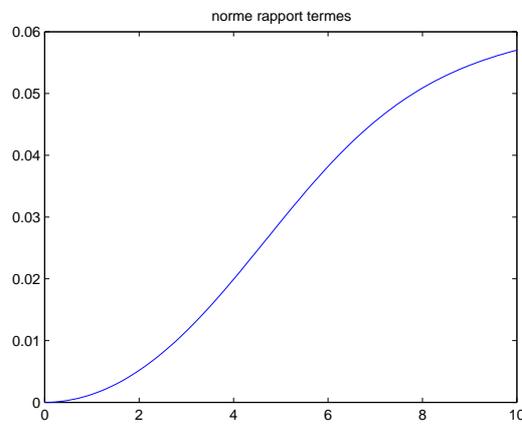
FIG. 4.20 – Vérification de l'hypothèse  $e^x \simeq 1 + x$ 

FIG. 4.21 – Vérification de l'hypothèse : terme non linéaire négligeable

#### 4.7.4 Méthode de calcul

Il y a deux possibilités pour calculer la matrice  $\tilde{H}$ . On peut soit la déduire de la matrice  $H$ , mais cela implique de calculer la matrice  $D$  correspondant aux distances rayons-pixels, soit la calculer par un algorithme semblable à celui utilisé pour la construction de  $H$ . En effet, les termes de  $\tilde{H}$  dépendent uniquement des distances rayons-pixels. Notons que là encore, il sera possible de généraliser facilement ce modèle à un cas 3D.

#### 4.7.5 Atténuation subie par une fonction de base

##### 4.7.5.1 Position du problème

On cherche à évaluer l'atténuation induite par une fonction de base sur un rayon rectiligne homogène de largeur  $c$  dont la droite centrale se situe à la distance  $y_0$  du centre de la fonction de base. Compte tenu des symétries du problème, on peut supposer sans perte de généralité que la fonction de base est centrée à l'origine et que le rayon est parallèle à l'axe  $Ox$ . D'après la loi de Beer-Lambert, l'expression de son atténuation est la suivante :

$$I = I_0 \frac{1}{c} \int_{y_0 - \frac{c}{2}}^{y_0 + \frac{c}{2}} e^{K\sigma\sqrt{2\pi}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}} dy \quad (4.9)$$

En effectuant un développement limité autour de  $y = y_0$ , on obtient une expression approchée de  $I$  :

$$I = I_0 e^{K\sigma\sqrt{2\pi}e^{-\frac{y_0^2}{2\sigma^2}}} \left\{ 1 + \frac{c^2}{24} \left[ \frac{K^2}{\sigma^2} y_0^2 2\pi e^{-\frac{y_0^2}{\sigma^2}} - \left(-\frac{1}{\sigma} + \frac{y_0^2}{\sigma^3}\right) K\sqrt{2\pi} e^{-\frac{y_0^2}{2\sigma^2}} \right] \right\} \quad (4.10)$$

En utilisant l'approximation  $1 + x \simeq e^x$ , on obtient l'estimation suivante :

$$I = I_0 e^{K\sigma\sqrt{2\pi}e^{-\frac{y_0^2}{2\sigma^2}}} \exp \left\{ \frac{c^2}{24} \left[ \frac{K^2}{\sigma^2} y_0^2 2\pi e^{-\frac{y_0^2}{\sigma^2}} - \left(-\frac{1}{\sigma} + \frac{y_0^2}{\sigma^3}\right) K\sqrt{2\pi} e^{-\frac{y_0^2}{2\sigma^2}} \right] \right\} \quad (4.11)$$

Notre objectif est d'évaluer les erreurs dues aux approximations effectuées pour arriver aux équations (4.10) et (4.11).

#### 4.7.5.2 Méthodologie

On notera  $P(y_0) = -\log\left(\frac{I(y_0)}{I_0}\right)$ . De plus, pour un rayon infiniment mince, on pose :

$$P_{mince}(y_0) = -\log\left(e^{K\sigma\sqrt{2\pi}e^{-\frac{y_0^2}{2\sigma^2}}}\right)$$

A notre connaissance, l'intégrale en (4.9) n'admet pas d'expression analytique à partir de fonctions connues. Nous allons l'évaluer à l'aide de la fonction `quadv` de MATLAB. L'intégrale est ainsi évaluée par la méthode récursive de Simpson avec une tolérance de  $1 \cdot 10^{-6}$ . On en déduit  $P(y_0)$ . Cette technique sera nommée par la suite 'méthode n°1', L'évaluation de  $P$  par les équations (4.10) ou (4.11) sera respectivement nommée 'méthode n°2' ou 'méthode n°3'.

On fixe  $\sigma = 0.637$ , ce qui correspond à une valeur de  $FWHM = 1.5$ . Pour les 3 méthodes,  $I$  sera évaluée en des valeurs discrètes de  $y_0$ . Le pas de discrétisation sera de  $5e - 2$ .

Nous voulons savoir pour quelles valeurs de  $c$  les méthodes n°2 et/ou n°3 donnent des résultats similaires à la méthode n°1 qui implique une évaluation numérique de l'intégrale.

#### 4.7.5.3 Résultats

On note :

$$\begin{aligned} - \epsilon_{ep/mince} &= \frac{\|P_{mince} - P_{meth\ n^{\circ}1}\|^2}{\|P_{mince}\|^2} \\ - \epsilon_{ep_i/ep_j} &= \frac{\|P_{meth\ n^{\circ}i} - P_{meth\ n^{\circ}j}\|^2}{\|P_{meth\ n^{\circ}i}\|^2} \end{aligned}$$

épaisseur du rayon $c$	$\epsilon_{ep}/mince$	$\epsilon_{ep_1/ep_2}$	$\epsilon_{ep_1/ep_3}$	$\epsilon_{ep_2/ep_3}$
0.5	$6,39 \cdot 10^{-4}$	$2,23 \cdot 10^{-7}$	$4,68 \cdot 10^{-7}$	$1,66 \cdot 10^{-7}$
1	$9 \cdot 10^{-3}$	$5,02 \cdot 10^{-5}$	$1,15 \cdot 10^{-4}$	$4,28 \cdot 10^{-5}$
1.5	0.037	0.0011	0.0028	0.0011
2	0.09	0.0089	0.0259	0.0112
2.5	0.1631	0.0445	0.1403	0.0645

TAB. 4.1 – Comparaison des erreurs commises dans l'emploi des différents modèles pour simuler un faisceau épais atténué par une fonction de base

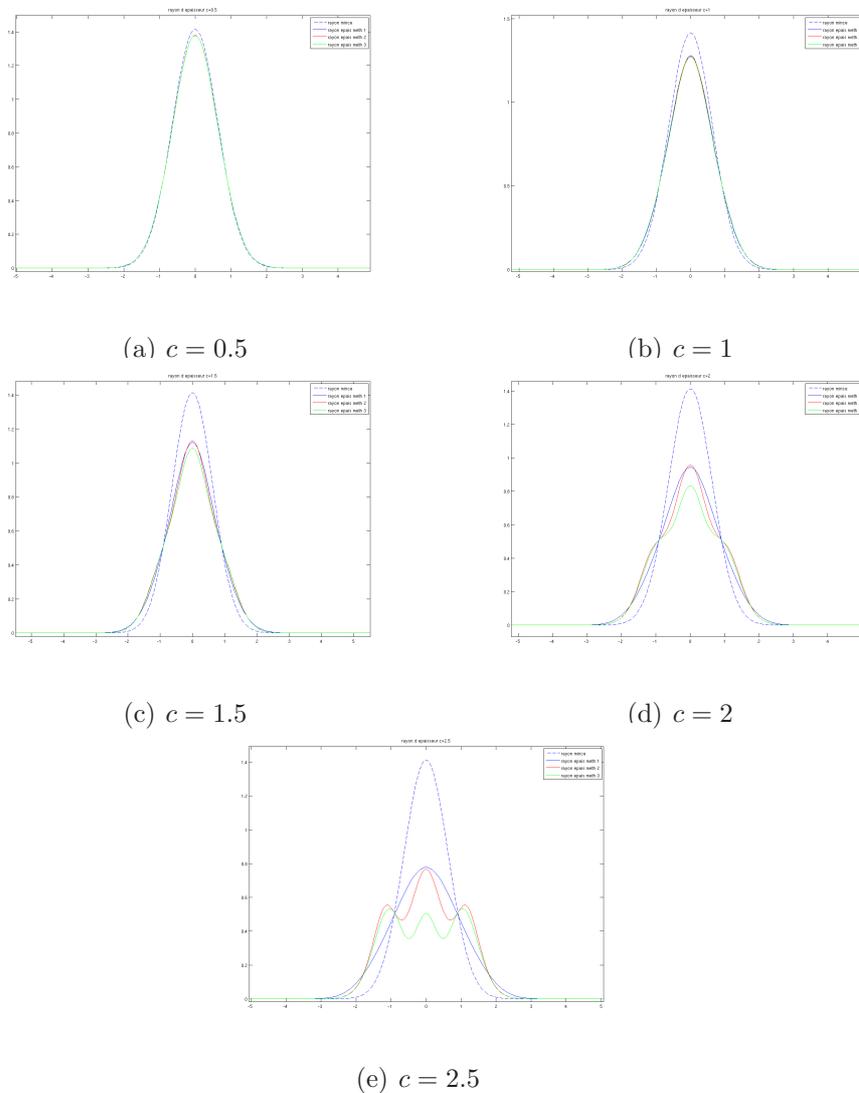


FIG. 4.22 – Estimations de  $P(y_0)$

La légende utilisée en figure 4.22 est :

**Discontinu bleu** :  $P_{mince}(y_0)$

**Continu bleu** :  $P_{meth\ n^{\circ}1}$ , utilisation de `quadv`

**Continu vert** :  $P_{meth\ n^{\circ}2}$ , développement limité à l'ordre 2

**Continu rouge** :  $P_{meth\ n^{\circ}3}$ , développement limité à l'ordre 2 et hypothèse  $1 + x \simeq e^x$

#### 4.7.5.4 Analyse des résultats

- Hypothèse du rayon infiniment mince

$\epsilon_{ep/mince}$  évalue l'erreur commise lorsque l'on fait l'approximation du rayon infiniment mince. Plus l'épaisseur du rayon est élevée, moins l'hypothèse est valide. L'hypothèse est valable pour  $c$  de l'ordre de  $\frac{1}{10}$ . Le sinogramme obtenu dans le cas de rayons d'épaisseur non négligeable sera plus atténué. Et cela d'autant plus que la valeur de  $c$  est élevée. La prise en compte de l'épaisseur des rayons va opérer une sorte de lissage des sinogrammes. Les fortes variations d'atténuations sont atténuées. Il ne s'agit pas à proprement parler d'un lissage par convolution à cause de la position du signe intégrale devant l'exponentielle.

- Développement limité

$\epsilon_{ep1/ep2}$  évalue l'erreur commise lors du développement limité en  $y = y_0$  de  $\frac{I}{I_0}$ . Cette erreur est petite devant celle commise avec l'approximation 'rayon mince'. Cependant, elle croît avec l'épaisseur  $c$ . Pour une valeur de  $c$  supérieure à 2, l'erreur commise lors du développement limité devient du même ordre de grandeur que  $\epsilon_{ep/mince}$ .

- Hypothèse  $1 + x \simeq e^x$

$\epsilon_{ep2/ep3}$  évalue l'erreur commise lors de l'approximation  $1 + x \simeq e^x$ . On remarque là aussi que ce n'est valable que pour de petites valeurs de  $c$ . De plus, cette erreur est du même ordre de grandeur que celle commise lors du développement limité.

#### 4.7.5.5 Conclusion

Sous l'hypothèse d'un milieu décomposé de façon exacte sur une base de gaussiennes,

- L'approximation du rayon mince entraîne des erreurs dans le calcul des projections.
- L'approximation des projections dans le cas d'un rayon épais à l'aide d'un développement limité permet de réduire ces erreurs. Cela s'applique dans le cas où la taille des détecteurs est de l'ordre de la résolution de l'image (représentée par la largeur d'un pixel).
- Si, de plus, les projections sont estimées sous l'hypothèse  $1 + x \simeq e^x$ , l'erreur commise est inférieure à celle commise sous l'hypothèse rayon mince. De plus, sous cette hypothèse, le calcul des projections peut se faire de façon matricielle, sans passer par le calcul de l'atténuation. Cette formulation est

plus proche de la modélisation du problème sous hypothèse rayon mince et permet d'éviter des problèmes numériques dus au passage par l'exponentielle.

## 4.8 Comparaison des modèles

Nous souhaitons comparer notre nouveau modèle avec le modèle de la pondération par l'aire. Nous partons de l'objet décrit en figure 3.26. Nous utilisons les mêmes notations qu'en section 3.4.1. La grille d'échantillonnage du milieu est de taille  $I \times J = N$  avec  $I = J$ . On note  $c_{ij} = \mu(x_i, y_j)$ . Ces coefficients correspondent à ceux de la décomposition de  $\mu(x, y)$  sur la base des pixels carrés pour une résolution  $N$ . De la même façon, on définit les  $g_{ij}$  comme coefficients de la décomposition du milieu sur la base des gaussiennes. Les matrices de projection correspondant aux bases pixels carrés et gaussiens sont respectivement notées  $H_c$  et  $H_g$ . On notera  $H_{ce}$  la matrice de projection correspondant à la méthode de la pondération par l'aire décrite en 4.5 et  $H_{ge}$  la matrice décrite en 4.7.2. Nous notons  $P_m$  les projections exactes du milieu sous hypothèse rayon mince et  $P_e$  dans le cas de la prise en compte de la taille du faisceau. Ces dernières seront calculées en utilisant la méthode décrite en section 4.4.1.3. Nous allons comparer :

- $P_m$
- $P_e$
- $P_c = H_c c$
- $P_g = H_g g$
- $P_{ce} = H_{ce} c$
- $P_{ge} = H_{ge} g$

pour une résolution  $N$  fixée.

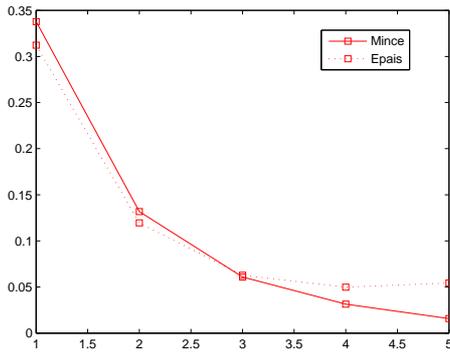
Nous considérerons que l'épaisseur d'un détecteur est égale à la distance entre deux détecteurs :  $c = \Delta_t$ . Nous nous plaçons dans le cas où  $N_t = 30$  détecteurs et  $N_\theta = 30$  angles. Entre chaque série de mesures, nous multiplions  $N$  par 4, ce qui revient à subdiviser chaque pixel en 4 sous pixels.

### 4.8.1 résultats

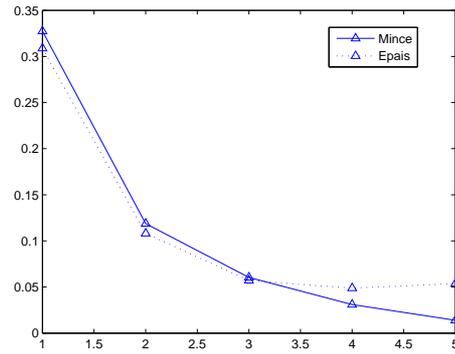
Pour les figures 4.23 à 4.26, la signification de l'abscisse est :

1.  $N = 20 \times 20$  pixels et  $c = 0.94$
2.  $N = 40 \times 40$  pixels et  $c = 1.88$
3.  $N = 80 \times 80$  pixels et  $c = 3.77$
4.  $N = 160 \times 160$  pixels et  $c = 7.54$
5.  $N = 320 \times 320$  pixels et  $c = 15.1$

La relation entre  $c$  et  $N$  est donnée par :  $c = \frac{\sqrt{2}}{N_t} \sqrt{N}$ . Nous considérons que les pixels sont de taille unitaire  $\Delta = 1$ , la grandeur  $c$  est donc donnée en pixels.



(a) Base de pixels classiques carrés



(b) Base de pixels gaussiens

FIG. 4.23 – Pour les deux bases étudiées, on a en trait continu :  $\frac{\|P_m - P_{base}\|_2^2}{\|P_m\|_2^2}$  et en trait pointillé :  $\frac{\|P_e - P_{base}\|_2^2}{\|P_e\|_2^2}$  avec  $P_{base} = P_c$  ou  $P_g$

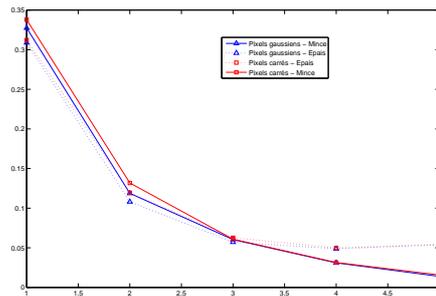


FIG. 4.24 – Superposition des deux figures précédentes, permettant de comparer les deux bases de représentation

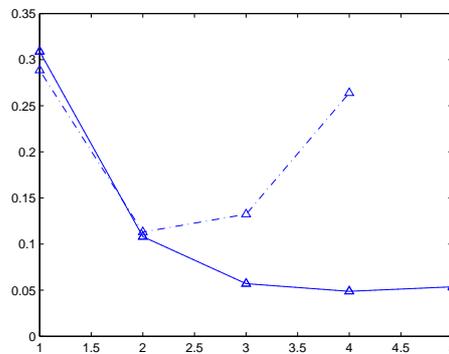


FIG. 4.25 – Pour la base de pixels gaussiens, nous comparons ici le modèle proposé en 4.7.2 avec le modèle rayon mince. On a en trait continu :  $\frac{\|P_e - P_g\|_2^2}{\|P_e\|_2^2}$  et en trait discontinu :  $\frac{\|P_e - P_{ge}\|_2^2}{\|P_e\|_2^2}$

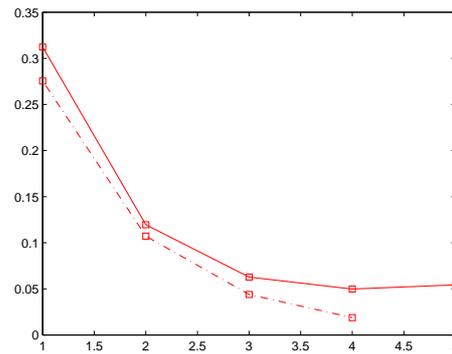


FIG. 4.26 – Pour la base de pixels carrés, nous comparons ici le modèle utilisant la pondération par l'aire avec le modèle rayon mince. On a en trait continu :  $\frac{\|P_e - P_c\|_2^2}{\|P_e\|_2^2}$  et en trait discontinu :  $\frac{\|P_e - P_{ce}\|_2^2}{\|P_e\|_2^2}$

## 4.8.2 Analyse des résultats

### • Comportement des modèles rayons minces des bases carrés et gaussiennes

La figure 4.24 nous permet d'affirmer que le choix de la base de décomposition n'influe que très peu sur le comportement du modèle dans le cas de détecteurs non ponctuels. Les erreurs de modèle sont du même ordre de grandeur et suivent les mêmes variations relativement à une augmentation de la résolution.

### • L'hypothèse rayon mince

Nous avons noté en section 3.4.1 que dans le cas où le modèle rayon mince s'avérait être exact, l'augmentation de la résolution entraînait une diminution de l'erreur engendrée par le modèle. Sur la figure 4.23, nous remarquons que ce n'est plus le cas lorsque la taille des détecteurs est prise en compte lorsque l'on calcule les mesures exactes. L'erreur de modèle diminue jusqu'à un point correspondant à  $N = 160 \times 160$  pixels, puis ré augmente. Le schéma 4.27 donne une interprétation de ce phénomène.

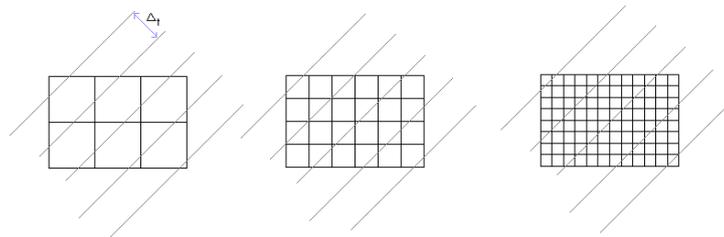


FIG. 4.27 – Lorsque le nombre de pixels augmente, l'approximation rayon mince entraîne plus d'erreurs. Ce modèle suppose que certains pixels ne sont pas traversés par les rayons. Dans le cas de détecteurs de largeur non nulle, les pixels sont traversés par des faisceaux de rayons. Chaque point du milieu est traversé, quel que soit sa position spatiale.

### • Méthode de pondération par l'aire

La figure 4.26 permet de juger de la qualité de la méthode de pondération par l'aire. On remarque que les erreurs engendrées par un tel modèle sont inférieures à celles obtenues dans le cas d'un modèle 'rayon mince', et ce, quelle que soit la résolution. La matrice  $H_{ce}$  étant très coûteuse en terme de stockage et temps de calcul, nous n'avons pas les résultats correspondant à une résolution  $N = 320 \times 320$  pixels.

- **Modèle présenté en 4.7.2**

La figure 4.25 nous permet d'évaluer le nouveau modèle linéaire que nous avons proposé dans la section 4.7.2. Il est clair que ce modèle n'est pas satisfaisant. Jusqu'à une résolution  $N = 40 \times 40$ , correspondant à une taille de pixel  $\Delta = \frac{c}{1.8}$ , le modèle est satisfaisant, il permet de réduire les erreurs dues à l'approximation rayon mince. Notons que la réduction d'erreur est moins importante que celle réalisée par la pondération par l'aire. Pour des valeurs de  $N$  plus élevées, le modèle n'est plus valable car les hypothèses sur lesquelles il se base ne s'appliquent plus. Notamment, le rapport entre la largeur du détecteur et la taille du pixel devient importante.

- **Temps de calcul**

Notons que la matrice  $H_{ge}$  est bien plus rapide à calculer que  $H_{ce}$ .

## 4.9 Conclusion

La taille des détecteurs intervient dans la formulation du modèle décrivant la génération des données. Si on la prend en compte, le modèle n'est plus linéaire. Une approximation classique, consistant en une interversion d'intégrale et d'exponentielle, permet de linéariser le modèle. La matrice de projection est alors très longue à calculer et la loi de génération des données n'est plus respectée. Dans le cas où les objets étudiés sont de petite taille devant la taille des détecteurs, ou très atténuants, on atteint des erreurs de l'ordre de 50%. Nous avons essayé de créer un modèle plus proche du modèle exact de génération des données, construit à partir d'une approximation à l'ordre 2 de la loi de Beer-Lambert. Nous parvenons à un modèle linéarisable. Dans le cas d'une décomposition de l'objet sur des pixels gaussiens, nous obtenons une nouvelle matrice de projection dont les coefficients ne dépendent que de la distance rayons-pixels. Cependant, ce modèle est valable pour une taille de détecteurs du même ordre de grandeur de la résolution souhaitée.



# Conclusion et perspectives

Le premier objectif de ce travail était d'évaluer les conséquences d'une modification de la formulation du problème direct en tomographie reposant sur un changement de la base de représentation du milieu discrétisé. Nous nous sommes plus particulièrement intéressés à la base de pixels gaussiens. Sa propriété de symétrie circulaire facilite le calcul des éléments de la matrice de projection et permet une généralisation immédiate de ce calcul au cas tridimensionnel. Une conclusion précise quant à une réduction du temps de calcul ne pourra être apportée qu'en implantant les codes dans un langage adapté (par exemple le *C*) et en les testant sur des problèmes de taille plus réaliste. Le caractère moins creux de la matrice de projection obtenue est un inconvénient, mais uniquement dans le cas où l'on souhaiterait stocker la matrice. Alors que l'incapacité des gaussiennes à représenter des zones constantes est pointée par certains auteurs, il semble qu'en terme de qualité de représentation, la base de gaussiennes soit équivalente à la base classique de pixels carrés. De même, les deux bases fournissent des modèles de projection de qualité comparable. Elles se différencient pourtant lors de la reconstruction, la base gaussienne conduisant à de meilleurs résultats.

En ce qui concerne la reconstruction sous l'hypothèse pixels gaussiens, il serait judicieux de construire un terme de pénalisation adapté à la décomposition sur une telle base. Si on note  $g_{ij}$  les coefficients de décomposition du milieu sur la base de gaussiennes et  $c_{ij}$  ceux associés à la base de pixels carrés classiques, le critère  $J(g) = J_1(g) + J_2(g)$  pourrait être transformée en  $J(g) = J_1(g) + J_2(\Psi(g))$ , où  $\Psi$  est l'opération de passage des  $g_{ij}$  aux  $c_{ij}$ . Il faudrait alors s'interroger sur la modification apportée au gradient du critère  $J_2$ .

Le second objectif était de proposer une nouvelle formulation du problème direct tenant compte de la taille des détecteurs. En la prenant en compte de manière exacte, nous obtenons un modèle non linéaire de génération des données. Nous avons souhaité conserver la forme linéaire du problème afin de ne pas devoir modifier les algorithmes de reconstruction. Le modèle que nous avons proposé est basé sur une approximation à l'ordre 2 du modèle exact. Il semble en théorie plus précis que le modèle classiquement utilisé. Cependant, en pratique, ce dernier semble donner de meilleurs résultats, d'autant plus que notre nouveau modèle n'est valable que pour des détecteurs de largeur du même ordre de grandeur que la résolution désirée.

Une perspective intéressante serait de conserver le caractère non linéaire du problème direct et d'essayer de construire des algorithmes de reconstruction adaptés à cette nouvelle formulation. Les algorithmes proposés par [14] dans le cadre de la reconstruction sous hypothèse de faisceau polychromatique peuvent servir de point de départ à cette étude.



# Bibliographie

- [1] R. Bracewell. The Fourier Transform and Its Applications. *3rd ed. New York : McGraw-Hill*, pages 262–266, 1999. [2.1](#)
- [2] R. H. Byrd, J. Nocedal, and R. B. Schnabel. Representations of Quasi-Newton Matrices and their Use in Limited Memory Methods. *Mathematical Programming*, 63 :129–156, 1995. [1.4.1](#), [1.4.3.5](#), [3.5](#)
- [3] M. Christiaens, B. De Sutter, K. De Bosschere, J. Vn Campenhout, and I. Lemahieu. A fast cach-aware algorithm for the calculation of radiological paths exploiting subword parallelism. *Journal of Systems Architecture*, 45 :781–790, 1999. [2.2.2](#)
- [4] J. A. Fessler. Iterative Methods for Image Reconstruction. *ISBI Tutorial*, Apr. 2006. [1.4.1](#)
- [5] E Garduno and G. T. Herman. Optimization Of Basis Functions for Both Reconstruction and Visualisation. *Discrete Applied Mathematics*, 139 :95–111, 2004. [2.3.2.1](#)
- [6] P. J. Green. Bayesian Reconstructions From Emission Tomography Data Using a Modified EM Algorithm. *IEEE transactions on Medical Imaging*, 9(1), Mar. [1.4.3.5](#)
- [7] K. M. Hanson and G. Wecksung. Local basis-function approach to computed tomography. *Applied Optics*, 24 :4028, Dec. 1985. ([document](#)), [2](#), [2.1.1](#), [2.2](#), [2.2.1](#), [2.5](#), [2.2.3](#), [2.3.3](#), [2.4](#), [3.1.8.4](#), [4.5](#)
- [8] V. H. Henson, M. A. Limber, S. F. McCrmick, and B. T. Robinson. Multilevel Image Reconstruction with Natural Pixels. *SIAM Journal on Scientific Computing*, Jan. 1995. [2.1.1](#)
- [9] G.T. Herman, A. Lent, and S.W. Rowland. ART : Mathematics and Applications : A report on the Mathematical Foundations and the Applicability to Real Data of the Algebraic Reconstruction Techniques. *J. Theor. Biology*, 42 :1–32. [1.4.1](#)
- [10] H.M. Hudson and R.S. Larkin. Accelerating Image Reconstruction using Ordered Subsets of Projection Data. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 13 :601–609. [1.4.1](#)
- [11] A. C. Kak and M. Snaley. *Principles of Computerized Tomographic Imaging*. 1988. [4.6](#)
- [12] R. M. Lewitt. Alternatives to voxels for Image Representation in Iterative Reconstruction Algorithms. *Phys. Med. Biol.*, 37(3) :705–716, 1992. ([document](#)), [2](#), [2.3](#), [2.3.1](#), [2.3.2.1](#)
- [13] Shih-Chung B. Lo. Strip and Line Path Integrals with a Square Pixel Matrix : A Unified Theory for Computational CT Projections. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 7(4), Dec. 1988. [2.2.2](#)
- [14] Bruno De Man. Iterative Reconstruction for Reduction of Metal Artifacts in Computed Tomography. 2001. [1.2](#), [1.3](#), [4.3](#), [4.4.1.1](#), [4.9](#)

- 
- [15] N. Menvielle. Réduction des artéfacts métalliques en tomographie à rayons x. *Mémoire du diplôme de maîtrise ès sciences appliquées*, Nov. 2004. [1.4.3.4](#), [3.5](#), [4.3](#)
- [16] Todd K. Moon. The Expectation Maximization Algorithm. *IEEE Signal Processing Magazine*, Nov. 1996. [1.4.1](#), [1.4.3.5](#)
- [17] A. R. De Pierro. A Modified Expectation Maximization Algorithm for Penalized Likelihood Estimation in Emission Tomography. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 14(1), Mar. 1995. [1.4.3.5](#)
- [18] J. Qi, R. M. Leahy, S. R. Cherry, A. Chatziioannou, and T. H. Farquhar. High-resolution 3D Bayesian Image Reconstruction using the microPET small-animal scanner. *Phys. Med. Biol.*, 43 :1001–1013, 1998. [4.5](#)
- [19] J. J. Sheins, F. Boshen, and Herzog. Analytical Calculation of Volumes-of-Intersection for Iterative, Fully 3D PET Reconstruction. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 25(10), Oct. 2006. [4.5](#)
- [20] R. L. Siddon. Fast Calculation of the Exact Radiological Path for a Three-Dimensionnal CT Array. *Med. Phys.*, 12(2), Mar. 1985. [2.8](#), [2.2.2](#)
- [21] A. Testegge, S. Weber, H. Herzog, H. W. Müller-Gärner, and H. Halling. High Resolution and Better Quantification by Tube of Response Modelling in 3D PET Reconstruction. *Nuclear Science Symposium Conference Record IEEE*, 3 :1603–1607, Nov. 1996. [4.5](#)
- [22] K. Thielemans, M. W. Jacobson, and D. Belluzo. On Various Approximations for the Projectors in Iterative Reconstruction Algorithms for 3D PET. *Poster at 3D99*, 1999. [4.5](#)
- [23] D. Y. Yu and S. C. Huang. Study of Reprojection Methods in Terms of Their Resolution Loss and Sampling Loss. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 40(4). [3.1.8.4](#)
- [24] W. Zhuang, S. S. Gopal, and T. J. Hebert. Numerical Evaluation of Methods for Computing Tomographic Projections. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 41(4). [2.3.2.2](#), [2.10](#), [4.5](#)