Licence SM, corrigé du TD7

Transformée de Fourier.

Corrigé de l'Exercice 1.

La fonction $t \to H_\lambda(t)$ appartient clairement à $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$. Par conséquent, sa transformée de Fourier $\hat{H}_\lambda(\nu)$ est parfaitement définie. Celle-ci est donnée par

$$\hat{H}_\lambda(\nu) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda|t|} e^{-2i\pi\nu t}\, dt$$

On sait que $|t| = t$ si $t \geq 0$ et $|t| = -t$ si $t \leq 0$. Par conséquent, $\hat{H}_\lambda(\nu)$ peut s'écrire sous la forme

$$\hat{H}_\lambda(\nu) = \int_{-\infty}^{0} e^{\lambda t} e^{-2i\pi\nu t}\, dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda t} e^{-2i\pi\nu t}\, dt$$

L'intégrale sur $]-\infty, 0]$ est égale à

$$\int_{-\infty}^{0} e^{\lambda t} e^{-2i\pi\nu t}\, dt = \frac{1}{\lambda - 2i\pi\nu} \left[(e^{\lambda t} e^{-2i\pi\nu t})_{t=0} - \lim_{t \to -\infty} (e^{\lambda t} e^{-2i\pi\nu t}) \right]$$

Si $t \to -\infty$, $e^{\lambda t}$ tend vers 0. Puisque $|e^{-2i\pi\nu t}| = 1$, on en déduit que $e^{\lambda t} e^{-2i\pi\nu t}$ tend vers 0. Par conséquent,

$$\int_{-\infty}^{0} e^{\lambda t} e^{-2i\pi\nu t}\, dt = \frac{1}{\lambda - 2i\pi\nu}$$

On montre de la même façon que

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda t} e^{-2i\pi\nu t}\, dt = \frac{1}{\lambda + 2i\pi\nu}$$

On en déduit finalement que

$$\hat{H}_\lambda(\nu) = \frac{1}{\lambda - 2i\pi\nu} + \frac{1}{\lambda + 2i\pi\nu} = \frac{2\lambda}{\lambda^2 + 4\pi^2\nu^2}$$

On remarque que $\hat{H}_\lambda(\nu)$ est une fonction réelle et paire, comme attendu.

On va à présent chercher une solution de l'équation appartenant à $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$. Pour cela, on commence par remarquer que si $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, alors

$$\int_{\mathbb{R}} e^{|t-s|} f(s) ds = (f * H_1)(t)$$

Si une telle fonction f vérifie l'équation, elle vérifie

$$(f * H_1)(t) + 2f(t) = H_1(t)$$

Si l'on désigne par $\hat{f}(\nu)$ la transformée de Fourier de f (qui est bien définie car f est supposée appartenir à $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$), ceci équivaut à

$$\hat{f}(\nu)(2 + \hat{H}_1(\nu)) = \hat{H}_1(\nu)$$

En utilisant l'expression de $\hat{H}_1(\nu)$ obtenue plus haut, on en déduit immédiatement que

$$\hat{f}(\nu) = \frac{1}{2 + 4\pi^2\nu^2}$$

Ceci est à rapprocher de l'expression de la transformée de Fourier de $H_{\sqrt{2}}$ qui est

$$\hat{H}_{\sqrt{2}}(\nu) = \frac{2\sqrt{2}}{2 + 4\pi^2\nu^2}$$

Une fonction étant définie par sa transformée de Fourier, on en déduit que $f(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}} H_{\sqrt{2}}(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}|t|}$. Si l'on résume, on a établi que si f est une fonction de $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ safisfaisant l'équation, alors $f(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}|t|}$. Cette fonction appartient bien à $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$. Ceci permet de conclure que l'équation a une et seule solution appartenant à $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, donnée par $f(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}|t|}$.

Corrigé de l'Exercice 2.

On observe tout d'abord que $x(t)$ appartient à $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ et est indéfiniment dérivable. La fonction $x(t)$ vérifie $x'(t) = -2\pi t x(t)$. En dérivant une fois de plus, on obtient que

$$x''(t) = -2\pi x(t) - 2\pi t x'(t) = -2\pi x(t) + 4\pi^2 t^2 x(t)$$

Par conséquent, $x(t)$ est solution de l'équation différentielle du second ordre

$$x''(t) + 2\pi x(t) - 4\pi^2 t^2 x(t) = 0 \tag{1}$$

Il est facile de voir que $x(t)$ est 2 fois continument dérivable, et que $x'(t)$ et $x''(t)$ appartiennent à $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$. Par conséquent, la transformée de Fourier de $x''(t)$ est donc égale à $(2i\pi\nu)^2 \hat{x}(\nu)$ où $\hat{x}$ représente la transformée de Fourier de $x(t)$. Par ailleurs, $t^2 x(t)$ appartient à $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$. Ceci implique que la fonction $\nu \to \hat{x}(\nu)$ est deux fois dérivable, et que

$$\hat{x}''(\nu) = \int_{\mathbb{R}} (-2i\pi t)^2 x(t) e^{-2i\pi\nu t}\, dt$$

Si l'on prend la transformée de Fourier de l'équation (1), on obtient alors

$$-4\pi^2\nu^2 \hat{x}(\nu) + 2\pi \hat{x}(\nu) + \hat{x}''(\nu) = 0 \tag{2}$$

Par conséquent, $\hat{x}(\nu)$ vérifie la même équation différentielle que $x(t)$. A noter que $x(t)$ étant réelle et paire, alors $\hat{x}(\nu)$ est également réelle et paire.

Afin d'obtenir l'expression de $\hat{x}(\nu)$, on se propose de résoudre l'équation (2). On sait que $y(\nu) = e^{-\pi\nu^2}$ est solution de (2), et on cherche les autres solutions sous la forme $z(\nu) = K(\nu)y(\nu)$, où $K(\nu)$ va vérifier des conditions que nous allons mettre en évidence (méthode dite de variation des constantes). Il est facile de voir que

$$z''(\nu) = K(\nu)y''(\nu) + 2K'(\nu)y'(\nu) + K''(\nu)y(\nu)$$

On exprime à présent que z est solution de l'équation:

$$z''(\nu) + 2\pi z(\nu) - 4\pi^2\nu^2 z(\nu) = 0$$

En utilisant le fait que $y(\nu)$ est solution, on obtient immédiatement que K est solution de:

$$K''(\nu)y(\nu) + 2K'(\nu)y'(\nu) = 0$$

En utilisant que $y^{'}(\nu) = -2\pi\nu y(\nu)$, et que $y(\nu) \neq 0$ pour tout ν, on aboutit à

$$K^{''}(\nu) - 4\pi\nu K^{'}(\nu) = 0$$

Ceci conduit à $\log K^{'}(\nu) = 2\pi\nu^2 + c$, où c est une constante, ou de façon équivalente à $K^{'}(\nu) = ae^{2\pi\nu^2}$ où a est une constante positive ou nulle. Par conséquent, $K(\nu)$ se met sous la forme

$$K(\nu) = a\int_0^\nu 2\pi\mu^2\, d\mu + b$$

où b est une constante. $z(\nu)$ est donc solution si et seulement si elle se met sous la forme

$$z(\nu) = a\left(\int_0^\nu 2\pi\mu^2\, d\mu\right) e^{-\pi\nu^2} + be^{-\pi\nu^2}$$

où $a$et b sont des constantes. La transformée de Fourier $\hat{x}(\nu)$ de $x(t)$ se met donc sous cette forme. Rappelons $\hat{x}(\nu)$ est paire. La fonction

$$\nu \to \left(\int_0^\nu 2\pi\mu^2\, d\mu\right) e^{-\pi\nu^2}$$

est impaire, tandis que $e^{-\pi\nu^2}$ est paire. Pour que $z(\nu)$ soit impaire il faut donc que $a = 0$. Ceci implique que $\hat{x}(\nu) = be^{-\pi\nu^2}$, où b reste à déterminer. Pour cela, on écrit que

$$\hat{x}(0) = b = \int_{\mathbb{R}} x(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t^2}\, dt$$

Par ailleurs, $\hat{x}(\nu) = be^{-\pi\nu^2}$ appartient clairement à $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$. D'après le théorème d'inversion, on peut donc écrire que

$$x(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{x}(\nu) e^{2i\pi\nu t}\, d\nu$$

En appliquant cette formule pour $t = 0$ $(x(0) = 1)$, on obtient que

$$1 = \int_{\mathbb{R}} \hat{x}(\nu)\, d\nu = b\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi\nu^2}\, d\nu$$

On en déduit que $b^2 = 1$. b est positif car égal à l'intégrale d'une fonction positive. Donc, $b = 1$, et $\hat{x}(\nu) = e^{-\pi\nu^2}$.

Afin de calculer la transformée de Fourier de $y_\sigma(t)$, il suffit de faire un changement de variable dans l'intégrale définissant $\hat{y}_\sigma(\nu)$, permettant de faire apparaître la transformée de Fourier de $x(t)$. On trouve immédiatement que $\hat{y}_\sigma(\nu) = \hat{x}(\sqrt{2\pi}\sigma\nu) = e^{-2\pi^2\sigma^2\nu^2}$.

Afin de calculer $z = y_{\sigma_1} * y_{\sigma_2}$, on évalue sa transformée de Fourier qui est égale à $\hat{y}_{\sigma_1}(\nu)\hat{y}_{\sigma_2}(\nu) = e^{-2\pi^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)\nu^2}$. Si l'on pose $\sigma_3 = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^{1/2}$, on obtient que

$$\hat{z}(\nu) = e^{-2\pi^2\sigma_3^2\nu^2}$$

Ceci coincide avec transformée de Fourier de la fonction $y_{\sigma_3}(t)$. Par conséquent,

$$y_{\sigma_1} * y_{\sigma_2}(t) = y_{\sigma_3}(t)$$

où $\sigma_3 = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^{1/2}$.

Corrigé de l'Exercice 3.
D'après l'exercice 1,

$$\frac{2}{1+4\pi^2\nu^2} = \int_{\mathbb{R}} e^{-|t|}e^{-2i\pi\nu t}dt$$

La fonction $\nu \rightarrow \frac{2}{1+4\pi^2\nu^2}$ appartient à $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$. D'après le théorème d'inversion, on obtient que

$$e^{-|t|} = \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{1+4\pi^2\nu^2}e^{2i\pi\nu t}\, d\nu$$

Il s'agit à présent de calculer la transformée de Fourier $\hat{f}(\mu)$ de $f(x)$ définie par

$$\hat{f}(\mu) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2}e^{2i\pi\mu x}\, dx$$

En posant $x = 2\pi\nu$ dans cette dernière intégrale, on obtient que

$$\hat{f}(\mu) = \pi \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{1+4\pi^2\nu^2}e^{2i\pi(2\pi\mu)\nu}d\nu$$

On en déduit que $\hat{f}(\mu) = \pi e^{-2\pi|\mu|}$.

En supposant que toutes les conditions techniques portant sur $u(x,t)$ soient réunies, la transformée de Fourier de

$$x \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

coincide avec $(2i\pi\nu)^2\hat{u}(\nu,t)$. En prenant la transformée de Fourier de l'équation aux dérivées partielles, on obtient que

$$\frac{\partial \hat{u}(\nu,t)}{\partial t} + 4\pi^2\nu^2\hat{u}(\nu,t) = 0$$

En intégrant cette équation différentielle, on obtient alors que

$$\hat{u}(\nu,t) = \hat{u}(\nu,0)e^{-4\pi^2\nu^2t^2}$$

Or, puisque

$$u(x,0) = \frac{\theta}{1+x^2}$$

on a

$$\hat{u}(\nu,0) = \theta\pi e^{-2\pi|\nu|}$$

Ceci finalement implique que

$$\hat{u}(\nu,t) = \theta\pi e^{-2\pi|\nu|}e^{-4\pi^2\nu^2t^2}$$

D'après le théorème d'inversion,

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\nu,t)e^{2i\pi x\nu}\, d\nu$$

Par ailleurs, pour t fixé, $\nu \rightarrow \hat{u}(\nu,t)$ est le produit de $\nu \rightarrow \theta\pi e^{-2\pi|\nu|}$ avec $\nu \rightarrow e^{-4\pi^2\nu^2t^2}$. En utilisant l'exercice 2, on voit facilement que $\nu \rightarrow e^{-4\pi^2\nu^2t^2}$ est la transformée de Fourier la fonction $x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{4\pi t^2}}e^{-\frac{x^2}{4t^2}}$. Ceci implique que $x \rightarrow u(x,t)$ est le produit ce convolution de cette dernière fonction avec la fonction $\theta f(x)$. On obtient finalement que

$$u(x,t) = \frac{\theta}{\sqrt{4\pi t^2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+y^2}e^{-\frac{(x-y)^2}{4t^2}}\, dy$$

Corrigé de l'Exercice 4.

$$g(t) = \int_{\mathbb{R}} f(s)f(t-s)\,ds = \int_{-T/2}^{T/2} f(t-s)\,ds$$

Commençons par évaluer $g(t)$ pour $t \geq 0$. Si $t > T$, $t - s > T/2$ si $s \in [-T/2, T/2]$. Dans ces conditions, $f(t-s) = 0$ si $s \in [-T/2, T/2]$. Par conséquent, $g(t) = 0$ si $t > T$. Si $0 \leq t \leq T$, ou de façon équivalente si $-T/2 \leq t - T/2 \leq T/2$, $g(t)$ s'écrit sous la forme

$$g(t) = \int_{t-T/2}^{T/2} f(s-t)\,ds = \int_{t-T/2}^{T/2} ds = T - t$$

En raisonnant de la même façon, on aboutit à $g(t) = 0$ si $t < -T$ et $g(t) = T + t$ si $-T \leq t \leq 0$. Finalement, $g(t) = (T - |t|)\mathbb{I}_{[-T,T]}$.
$\hat{g}(\nu)$ coincide avec $(\hat{f}(\nu))^2$. Un calcul immédiat donne alors

$$\hat{g}(\nu) = \left(\frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}\right)^2$$

Corrigé de l'Exercice 5.
Le texte comporte quelques erreurs: l'équation différentielle est $y^{'}(t) + ay(t) = x(t)$, il n'y a pas besoin de supposer que $x(t)$ est continument dérivable, mais seulement continue.

Si y_0 existe, la transformée de Fourier de l'équation différentielle donne $(a + 2i\pi\nu)\hat{y}_0(\nu) = \hat{x}(\nu)$. Ceci donne

$$\hat{y}_0(\nu) = \frac{\hat{x}(\nu)}{a + 2i\pi\nu}$$

Puisque $\nu \to \frac{1}{a+2i\pi\nu}$ est la transformée de Fourier de la fonction $f(t)$ donnée par $f(t) = e^{-at}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}$, on en déduit que $y_0(t) = (f * x)(t)$, i.e. que

$$y_0(t) = \int_{\mathbb{R}} x(s)f(t-s)\,ds = \int_{-\infty}^{t} x(s)e^{-a(t-s)}\,ds = e^{-at}\int_{-\infty}^{t} x(s)\,ds$$

On a donc établi que si y_0 existe, elle est définie de façon unique par $y_0 = f * x$. Il reste à vérifier a posteriori que cette fonction vérifie les hypothèses de l'exercice. y_0 appartient à $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ car elle est définie comme le produit de convolution de 2 fonctions de $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$. On vérifie qu'elle est continument dérivable et satisfait l'équation différentielle. Enfin, d'après l'équation différentielle,

$$y_0^{'}(t) = x(t) - ay_0(t)$$

x et y_0 appartenant à $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, $y_0^{'}$ appartient aussi à $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$.