Notions sur les signaux aléatoires.

Introduction

Signaux dont on ne peut connaitre les valeurs avant des les avoir observés : imprévisibles.

Mise en évidence de techniques permettant d'évaluer des propriétés statistiques (i.e. moyennes) pour en avoir une meilleure connaissance quantitative.

Exemples.

- Le bruit de fond $b(t)$
- Signal $x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n g(t - nT)$ transmis par un système de communication : la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est aléatoire.

Question typique relative aux notions qui vont être introduites :

Quelle bande passante réserver a priori à la transmission du signal $x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n g(t - nT)$? Définir un concept de bande passante moyenne.

Trajectoires d'un signal aléatoire I.

Variable aléatoire x = nombre réel dont la valeur est imprévisible avant de l'observer lors d'une expérience

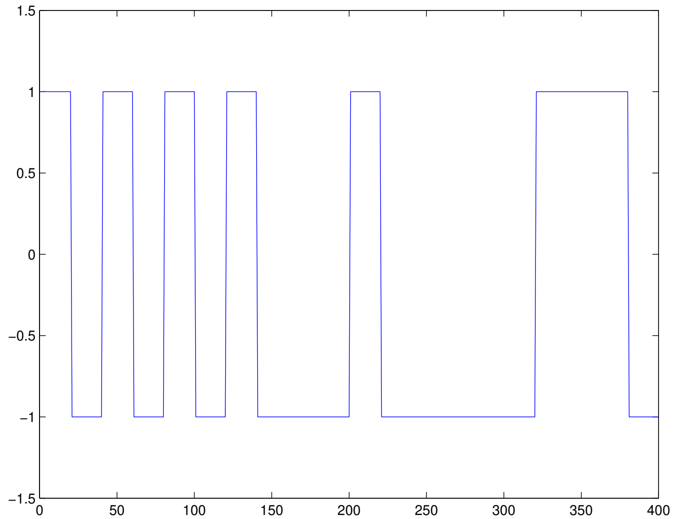
Réalisation de x = valeur prise par x lors d'une expérience.

Signal aléatoire $x(t)$ = signal dont tel que pour tout t, $x(t)$ est une variable aléatoire.

Réalisation d'un signal aléatoire $x(t)$ = ensemble des valeurs prises par les v.a. $x(t)$ quand t varie. Appelé aussi trajectoire.

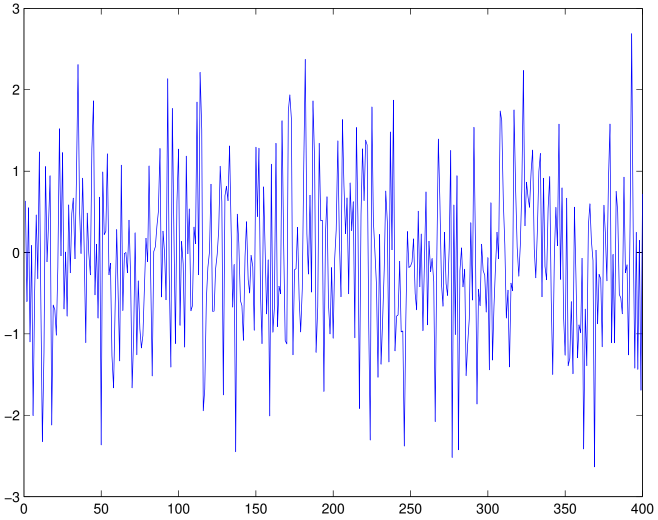
Trajectoires d'un signal aléatoire II.

Exemple 1 : $\sum_n a_n g(t - nT)$



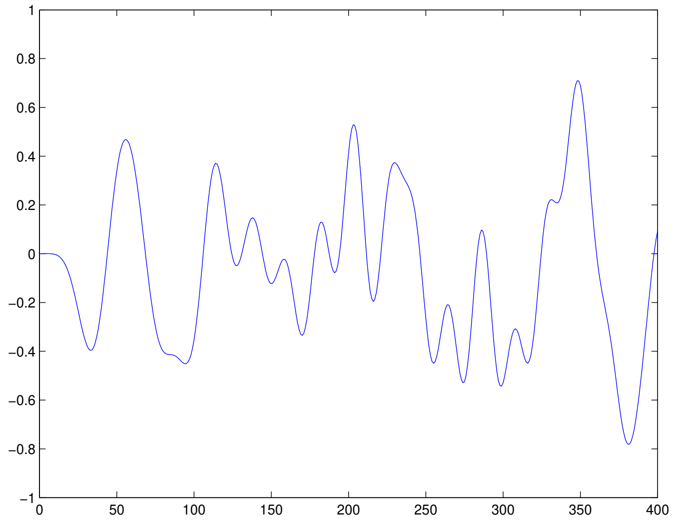
Trajectoires d'un signal aléatoire III.

Exemple 2 : bruit de fond.



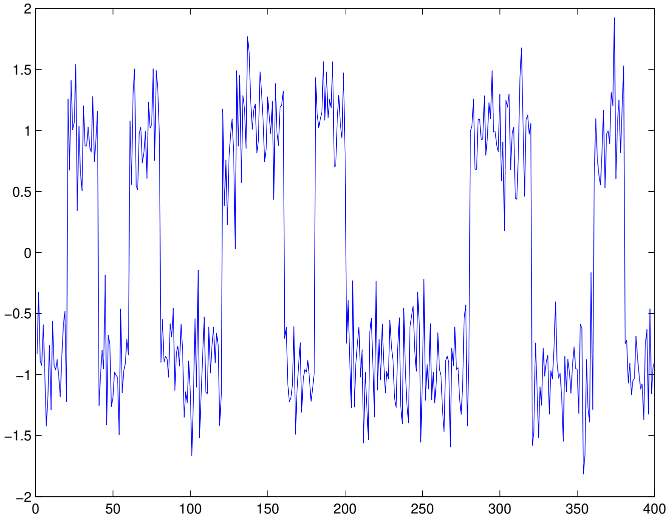
Trajectoires d'un signal aléatoire IV.

Exemple 3 : bruit de fond filtre.



Trajectoires d'un signal aléatoire V.

Exemple 4 : créneau bruité, SNR=10dB.



Propriétés statistiques d'un signal aléatoire.

La moyenne : $t \to E(x(t))$.

Comment l'estimer ? Tirer un grand nombre de trajectoires, et évaluer la moyenne des valeurs prises par ces fonctions à chaque instant t.

La fonction de covariance $(s,t) \to E(x(t)x(s)^*)$

S'estime aussi en tirant un grand nombre de trajectoires, et en évaluant des moyennes pertinentes.

Loi de probabilité de x : donnée des lois de probabilité conjointe des vecteurs aléatoires $(x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_N))$ pour tout N et pour tous $t_1, \ldots, t_N$

Le signal aléatoire x est dit gaussien si toutes les lois des vecteurs $(x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_N))$ sont gaussiennes $\Longleftrightarrow$ toute combinaison linéaire des v.a. extraites de x est une v.a. gaussienne.

Signaux aléatoires stationnaires I.

$x(t)$ est dit stationnaire (au sens large) si

- $E(x(t)) = m$ est indépendant de t
- $E(x(t+\tau)x(t)^*) = R(\tau)$ est indépendant de t.

En général, m et $R(\tau)$ peuvent s'estimer en observant une seule trajectoire et en faisant des moyennes temporelles :

$\lim_{S \to +\infty} \frac{1}{2S} \int_{-S}^{S} x(t)dt \to m$

$\lim_{S \to +\infty} \frac{1}{2S} \int_{-S}^{S} x(t+\tau)x(t)^* dt \to R(\tau)$

Signaux aléatoires stationnaires II.

Exemples de signaux aléatoires stationnaires.

- Le bruit blanc : $E(x(t) = 0$ et $E(x(t+\tau)x(t)^* = N_0\delta(t-\tau)$
- La sortie d'un filtre excité par un bruit blanc.

Propriété importante : la sortie d'un filtre excité par un signal aléatoire stationnaire est encore stationnaire.

Signaux aléatoires stationnaires III.

Exemple de signal aléatoire non stationnaire.

$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n g(t - nT)$ où la suite a est indépendante et identiquement distribuée (moyenne nulle et variance 1).

- $E(x(t)) = 0$ pour tout t, indépendant de t
- $E(x(t+\tau)x(t)^*) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(t+\tau-nT)g(t-nT)$, dépendant de t.

$t \to E(x(t+\tau)x(t))$ est périodique de période T : signal cyclostationnaire.

Fonction d'autocorrélation de $x(t)$:

$$R(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T E(x(t+\tau)x(t)^*)dt$$

Densité spectrale des signaux (cyclo-)stationnaires I.

Motivation : Définir une notion de "transformée de Fourier moyenne" et donc de "bande passante moyenne".

$x(t)$ aléatoire stationnaire : $\left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2i\pi f t} dt \right|^2$: 2 problèmes.

- Quantité a priori aléatoire, dépend de la trajectoire
- N'a pas de sens mathématique en théorie car $x(t)$ ne tend pas vers 0 si $|t| \to \infty$.

Densité spectrale des signaux (cyclo-)stationnaires II.

La bonne définition.

$$S(f) = \lim_{A \to \infty} E \left[\frac{1}{2A} \left| \int_{-A}^{A} x(t) e^{-2i\pi f t} dt \right|^2 \right]$$

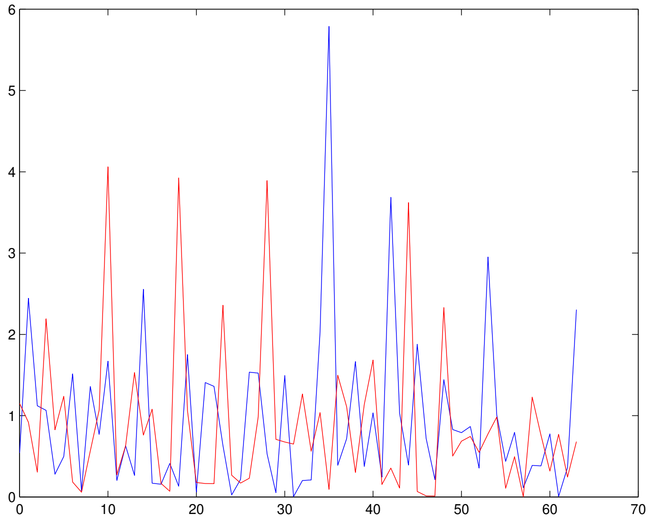
- Le terme $\frac{1}{2A}$ avec $A \to +\infty$ évite la divergence de l'intégrale
- L'opérateur d'espérance mathématique exprime le caractère moyen de $S(f)$

Densité spectrale des signaux (cyclo-)stationnaires III.

Remarque : on a besoin de l'espérance mathématique car $\frac{1}{2A}\left|\int_{-A}^{A} x(t)e^{-2i\pi f t}dt\right|^2$ est aléatoire.

Ecart type de l'ordre de $S(f)$ si A assez grand.

Illustration : calcul pour 2 trajectoires différentes, $S(f) = 1$.



Densité spectrale des signaux (cyclo-)stationnaires IV.

Propriétés de la densité spectrale.

- Si $x(t)$ est (cyclo-)stationnaire, alors $S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-2i\pi f \tau} d\tau$
- $S(f) \geq 0$ pour tout f
- Si $x(t)$ est réel, $S(-f) = S(f)$.
- Si $y(t)$ est la sortie du filtre $H(f)$ excité par $x(t)$, $S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f)$.

Densité spectrale des signaux (cyclo-)stationnaires V.

Exemples.

- Le bruit blanc, $E(x(t+\tau)x(t)^*) = N_0\delta(t-\tau)$: $S(f) = N_0$ pour tout f, la bande passante de $w(t)$ est $[-B, B]$
- Le bruit blanc dans la bande $[-B, B]$: $S(f) = N_0$ si $f \in [-B, B]$ et 0 ailleurs
- Le bruit blanc passe bande: $S(f) = \frac{N_0}{2}$ si $f \in [f_0 - B, f_0 + B] \cup [-f_0 - B, -f_0 + B]$
- $x(t) = \sum_n a_n g(t - nT)$, $S(f) = \frac{|G(f)|^2}{T}$.

La bande passante de $\sum_n a_n g(t - nT)$ = bande passante de $g(t)$.

Enveloppe complexe des signaux aléatoires passe-bande.

$x(t)$ passe-bande $[f_0 - B, f_0 + B]$, $x(t) = \mathrm{Re}(w(t)e^{2i\pi f_0 t})$.

Si $x(t)$ est un bruit blanc gaussien de densité spectrale $\frac{N_0}{2}$ dans la bande $[f_0 - B, f_0 + B]$:

Alors, $x(t) = \mathrm{Re}(w(t)e^{2i\pi f_0 t})$ avec $w(t) = u(t) + iv(t)$ et

- $u(t)$ et $v(t)$ sont blancs gaussiens dans la bande $[-B, B]$, et $S_u(f) = S_v(f) = N_0$ sur $[-B, B]$.
- $u(s)$ et $v(t)$ sont indépendantes pour tous s et t.

Echantillonnage des signaux aléatoires.

Le théorème de Shannon est encore vérifié.

Si la bande passante de $x_a(t)$ est $[-B, B]$, et si $T_e < \frac{1}{2B}$, alors :

$$x_a(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_a(nT_e) \frac{\sin(\frac{\pi(t-nT_e)}{T_e})}{\frac{\pi(t-nT_e)}{T_e}}$$

Signaux aléatoires stationnaires à temps discret I.

Suite $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de variables aléatoires.

Stationnaire si $E(x_n) = m$ (on prendra $m = 0$), et si $E(x_{n+k}x_k^*) = R_n$ indépendant de k.

$(R_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ fonction d'autocrrélation de x.

Exemple fondamental, le bruit blanc : $E(x_{n+k}x_k^*) = \sigma^2\delta(k)$

Signaux aléatoires stationnaires à temps discret II.

Densité spectrale des signaux stationnaires à temps discret.

Défini par :

$$S(f) = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} E\left[\left| \sum_{n=-N}^{N} x_n e^{-2i\pi n f} \right|^2 \right]$$

Si $E(x_{n+k}x_k^*) = \sigma^2\delta(k), S(f) = \sigma^2$.

Signaux aléatoires stationnaires à temps discret III.

Propriétés fondamentales :

- $S(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} R_n e^{-2i\pi n f}$
- si x est réel, $S(-f) = S(f)$
- Si y est la sortie du filtre $H(f)$ excité par x, $S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f)$