Modulations linéaires.

Les symboles I

Suite $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ tels que :

- $a_n = a_n^1 + i a_n^2$,
- a suite i.i.d. telle que $E(a_n) = 0$, $E|a_n|^2 = 1$

Les symboles II

Exemples.

- Constellation BPSK : $a_n = \pm 1$
- Constellation QPSK : $a_n \in \{1, i, -1, -i\}$
- Constellation MPSK : $a_n \in \{e^{\frac{2ik\pi}{M}}, k = 0, \ldots, M-1\}$
- Constellation QAM4 : $a_n \in \{\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1 + \pm i)\}$
- Constellation QAM16, QAM64, ...

La mise en forme

Génération du signal $x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n g(t - nT)$

$g(t)$ filtre de mise en forme, vérifie

$$\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)^2 dt = 1$$

Si les a_n sont complexes, $x(t) = x_1(t) + i x_2(t)$: génération de deux signaux réels portant les parties réelles et imaginaires de $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

La modulation

Le signal modulé $x_r(t)$

$$
\begin{aligned}
x_r(t) &= \mathrm{Re}((\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n g(t-nT))e^{2i\pi f_0 t}) \\
&= (\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n^1 g(t-nT))\cos(2\pi f_0 t) - (\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n^2 g(t-nT))\sin(2\pi f_0 t)
\end{aligned}
$$

La suite a^1 est portée par $\cos(2\pi f_0 t)$ et a^2 par $\sin(2\pi f_0 t)$.

Le signal reçu.

$y_r(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} x_r(t) + b_r(t)$ avec

- $b_r(t)$ bruit blanc dans la bande du signal $x_r(t)$, densité spectrale $\frac{N_0}{2}$
- E_s énergie reçue pendant une période symbole : énergie (reçue) par symbole

Le modèle en bande de base équivalent.

$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \times$ enveloppe complexe de $y_r(t)$, $b(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \times$ enveloppe complexe de $b_r(t)$

$y(t) = \sqrt{\frac{E_s}{T}} x(t) + b(t)$

$b(t) = b_1(t) + ib_2(t)$ avec :

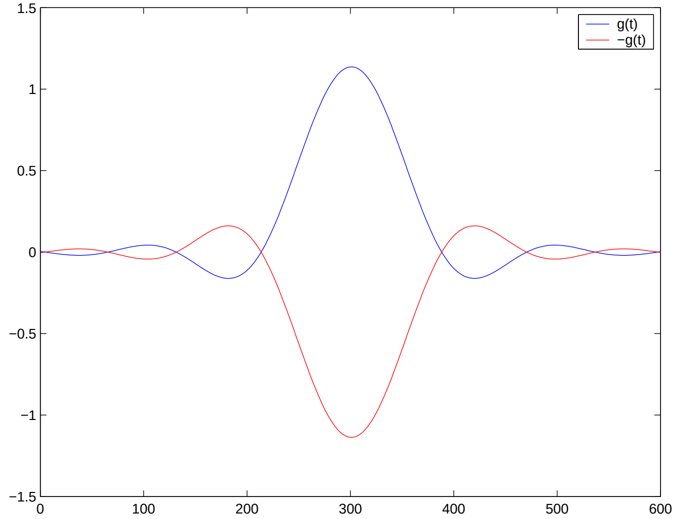
b_1 et b_2 signaux gaussiens indépendants, blancs dans la bande de $x(t)$, de densité spectrales $\frac{N_0}{2}$.

$b(t) = b_1(t) + ib_2(t)$ blanc dans la bande de $x(t)$, de densité spectrale N_0.

Réception : le filtrage adapté, I

Un cas simple : un seul symbole a_0 transmis

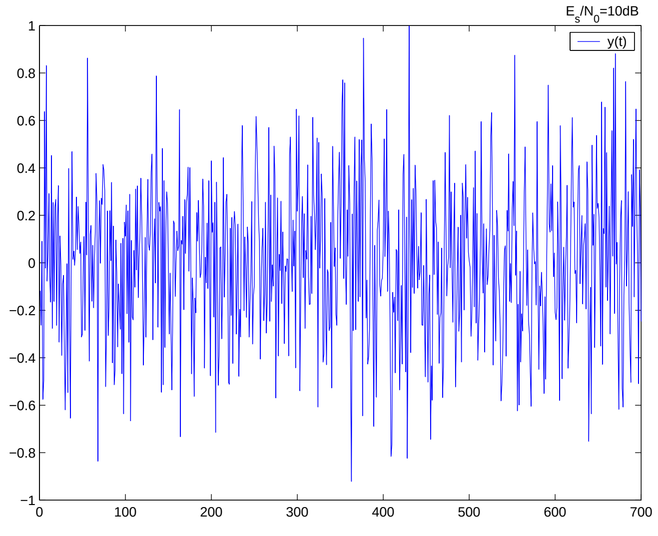
Signal transmis.



Réception : le filtrage adapté, II

Le signal reçu.

$$y(t) = \sqrt{\frac{E_s}{T}} a_0 g(t) + b(t)$$



Réception : le filtrage adapté, III

Question posée : comment extraire "intelligemment" la valeur de a_0 à partir de l'observation du signal $y(t)$?

Réception : le filtrage adapté, IV

Le détecteur minimisant la probabilité d'erreur.

Calcul de $y = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-\infty}^{\infty} y(t) g(t) dt$

$y = \sqrt{E_s} a_0 + b$

$b = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-\infty}^{\infty} b(t) g(t) dt$ variable aléatoire gaussienne complexe de variance N_0.

Prendre une décision au vu de y :

Exemples :

- Si $a_0 = \pm 1$, $\hat{a_0} = \mathrm{Signe}(\mathrm{Re}(y))$
- Si $a_0 \in \{e^{\frac{2i\pi k}{M}}, k = 0, \ldots, M\}$, voir selon l'argument de y
- Si $a_0 \in \{\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1 + \pm i)\}$, $\hat{a_0^1} = \mathrm{Signe}(\mathrm{Re}(y))$, $\hat{a_0^2} = \mathrm{Signe}(\mathrm{Im}(y))$

Réception : le filtrage adapté, V

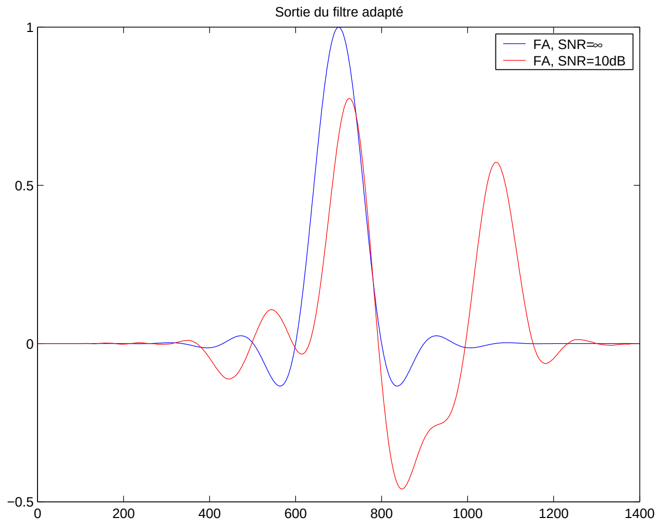
Interprétation en terme de filtrage.

Le filtre adapté : $h(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} g(-t)$

Sortie du filtre adapté :

$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(s)h(t-s)ds$

Variable de décision y = sortie du filtre adapté au bon instant.



Réception : le filtrage adapté, VI

Le cas général, une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est transmise.

- Pour détecter a_0 : $y_0 = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-\infty}^{\infty} y(t) g(t) dt =$ sortie du filtre adapté à $t = 0$.
- Pour détecter a_1 : $y_1 = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-\infty}^{\infty} y(t) g(t-T) dt =$ sortie du filtre adapté à $t = T$.
- Pour détecter a_n : $y_n = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-\infty}^{\infty} y(t) g(t-nT) dt =$ sortie du filtre adapté à $t = nT$.

Expression de y_n.

$$y_n = \sqrt{E_s} a_n + \sum_{m \neq n} a_m \sqrt{E_s} \int_{-\infty}^{\infty} g(t-mT) g(t-nT) dt + \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-\infty}^{\infty} b(t) g(t-nT) dt$$

Réception : le filtrage adapté, VII

La condition de Nyquist.

y_n ne doit pas être fonction des symboles $(a_m)_{m \neq n}$

Condition de Nyquist sur $g(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t + kT) g(t) dt = 0 \text{ si } k \neq 0.$$

Réception : le filtrage adapté, VIII

Interprétation fréquentielle de la condition de Nyquist.

$r(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} g(t+\tau) g(t) dt$

Condition de Nyquist : $r(kT) = \delta(k)$.

Transformée de Fourier de $r(\tau)$: $\frac{1}{T}|G(f)|^2$.

Poisson : $\sum_{n \in \mathbb{Z}} r(nT) e^{-2i\pi n f T} = \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |G(f - k/T)|^2 = 1$

La bande passante de $g(t)$ contient $[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}]$.

Bande passante de $x(t)$ contient $[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}]$.

Bande passante supérieure au débit symbole.

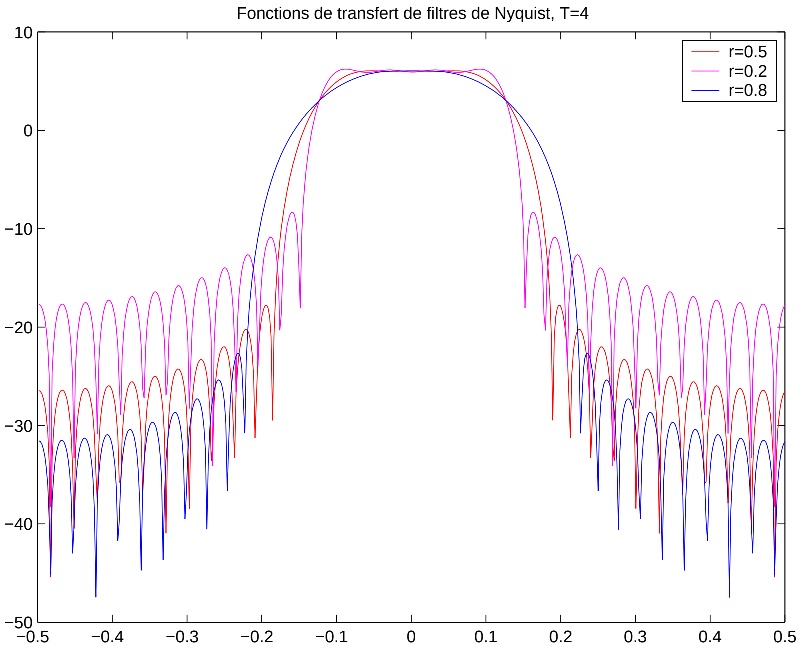
Filtres de mise en forme vérifiant la condition de Nyquist.

- $g(t) = 1$ si $t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$
- $g(t) = \frac{\sin(\frac{\pi t}{T})}{\pi t}$
- Plus généralement, filtres de demi-Nyquist.

Filtres de Nyquist.

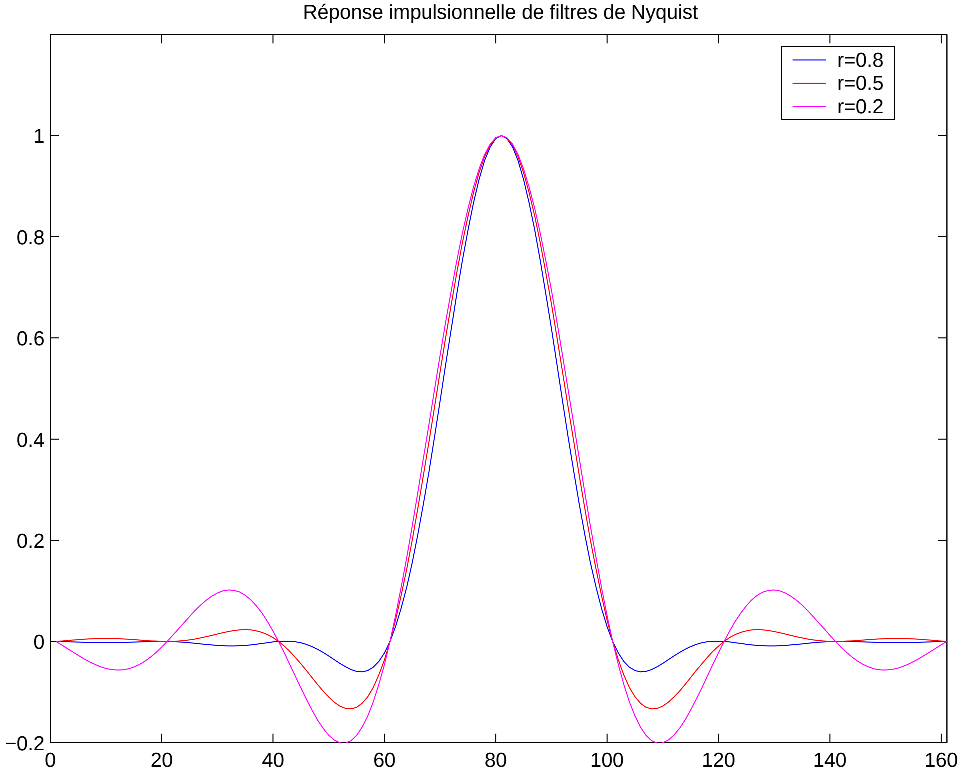
Filtres de mise en forme particuliers $h(t)$ vérifiant $h(kT) = 0$ si $k \neq 0$

Dépendent d'un facteur $0 < r < 1$ caractérisé par le fait que bande passante de $h(t) = [-\frac{1+r}{2T}, \frac{1+r}{2T}]$.



Filtres de Nyquist.

Réponses impulsionnelles pour $r = 0.8, 0.5, 0.2$

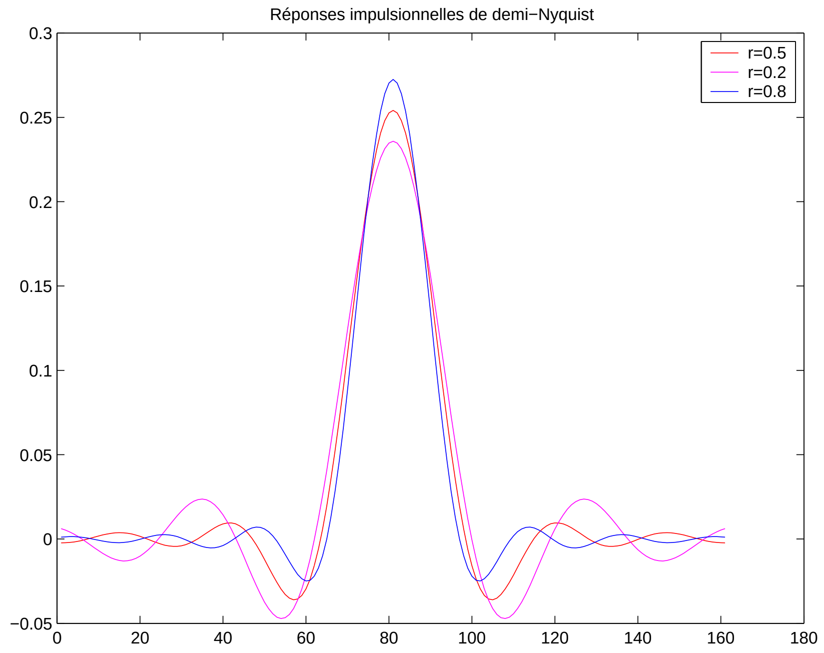


Filtres de demi-Nyquist

Filtres de mise en forme $g(t)$ tels que $g(t) * g(-t) =$ filtre de Nyquist

Equivalent à $|G(f)|^2 = H(f)$.

Réponses impulsionnelles pour $r = 0.8, 0.5, 0.2$



Rapport signal sur bruit en sortie de filtre adapté.

Expression de y_n.

$y_n = \sqrt{E_s} a_n + b_n$ avec $b_n = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-\infty}^{\infty} b(t) g(t - nT) dt$

b_n variable aléatoire gaussienne de variance N_0.

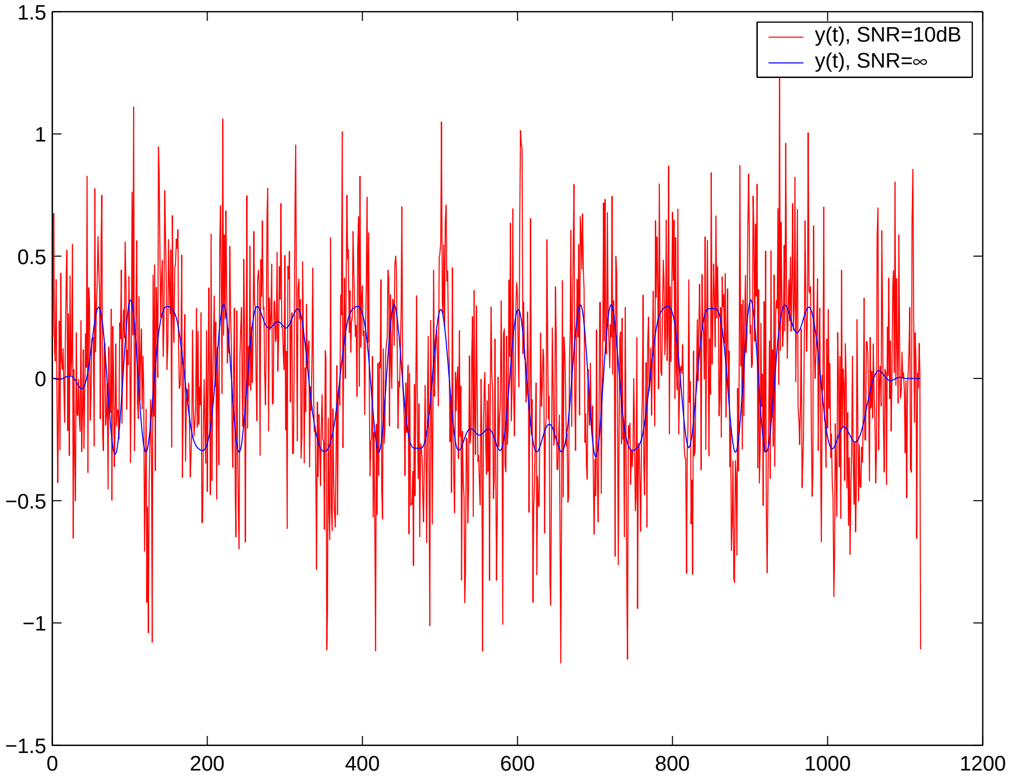
Rapport signal sur bruit : $\frac{E_s}{N_0}$.

Illustrations.

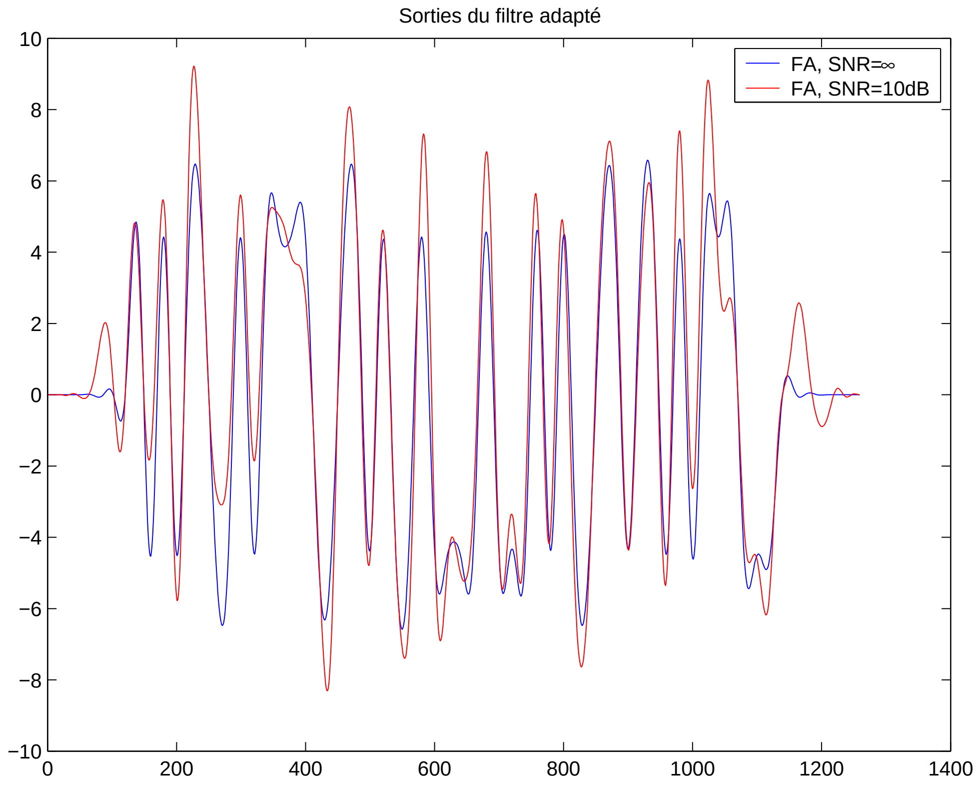
Contexte de la simulation :

- suite de symboles ± 1
- période symbole $T = 20$
- période d'échantillonnage $T_e = 1$
- filtre de mise en forme : demi-Nyquist de roll-off 0.5
- bruit blanc gaussien dans la bande $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
- $\frac{E_s}{N_0} = 10\text{dB}$

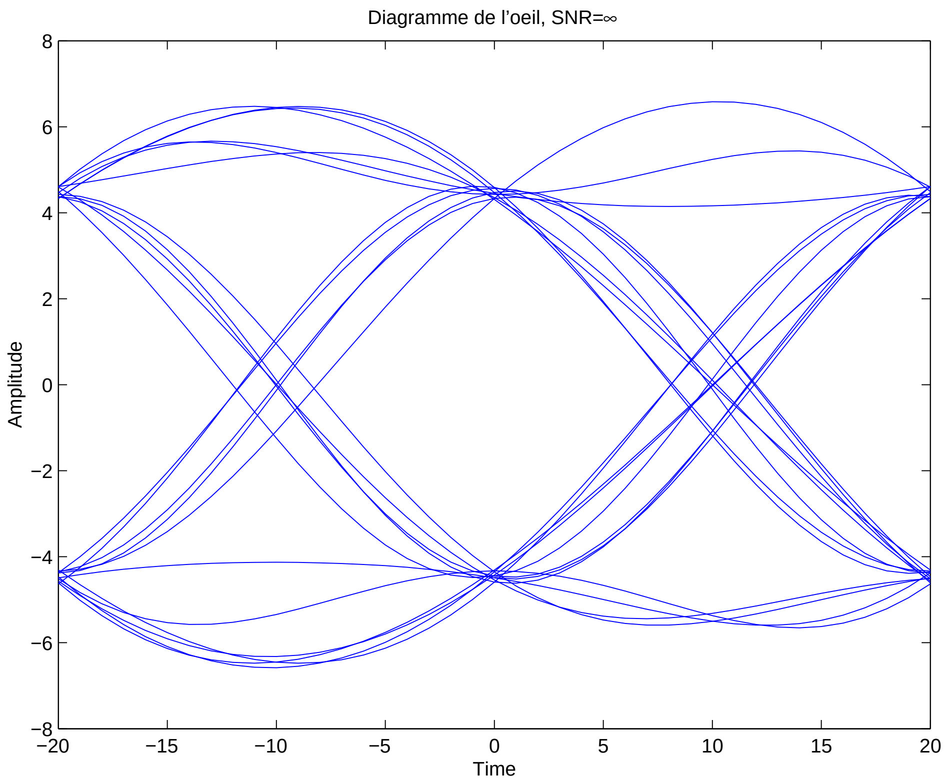
Les signaux non bruité et bruité.



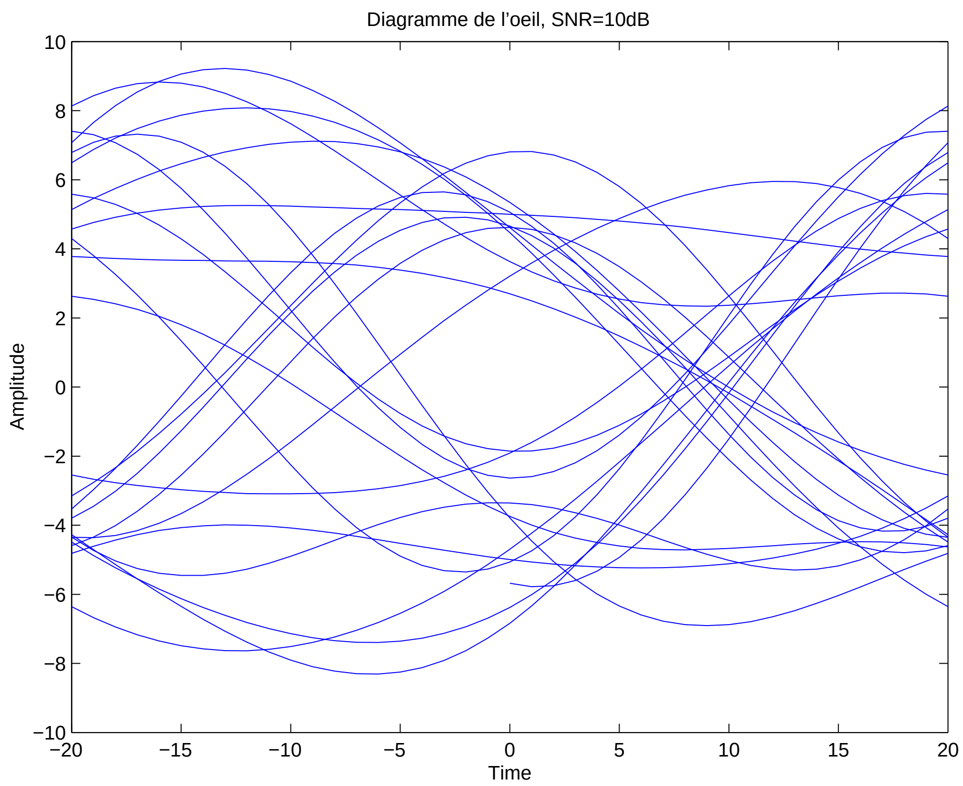
La sortie du filtre adapté, cas non bruité et bruité.



Le diagramme de l'oeil, cas non bruité.



Le diagramme de l'oeil, cas bruité.



Quelques évaluations de performances I.

Notion d'énergie par bit.

$a_n = \pm 1$: 1 bit = 1 symbole, $E_b = E_s$

$a_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1 \pm i)$: 2 bits = 1 symbole, $E_b = \frac{E_s}{2}$

a_n constellation à 2^M valeurs possibles : M bits = 1 symbole, $E_b = \frac{E_s}{M}$

Evaluer les performances en fonction de $\frac{E_b}{N_0}$

Quelques évaluations de performances II.

BPSK : $a_n = \pm 1$, $E_s = E_b$

Après filtrage adapté, $y_n = \sqrt{E_b} a_n + b_n$

$b_n = b_{1,n} + i b_{2,n}$, avec b_1, b_2 blancs gaussiens indépendants de variance $\frac{N_0}{2}$.

$y_{1,n} = \mathrm{Re}(y_n) = \sqrt{E_b} a_n + b_{1,n}$.

Evènement d'erreur : $((y_{1,n} < 0) \cap (a_n = 1)) \cup ((y_{1,n} > 0)) \cap (a_n = -1))$

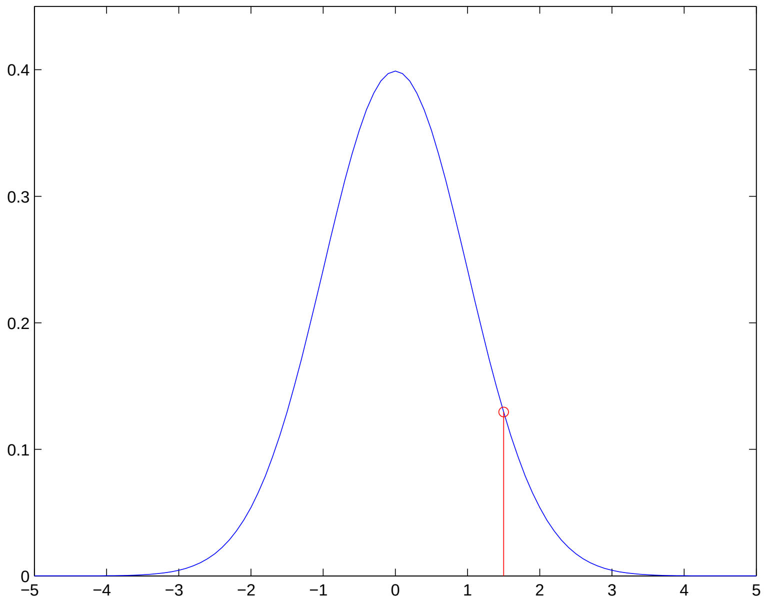
Autre expression : $((b_{1,n} < -\sqrt{E_b}) \cap (a_n = 1)) \cup (b_{1,n} > \sqrt{E_b}) \cap (a_n = -1))$

Proba d'erreur : $P(b_{1,n} > \sqrt{E_b}) = P(N(0,1) > \sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}) = Q(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}})$.

Quelques évaluations de performances III.

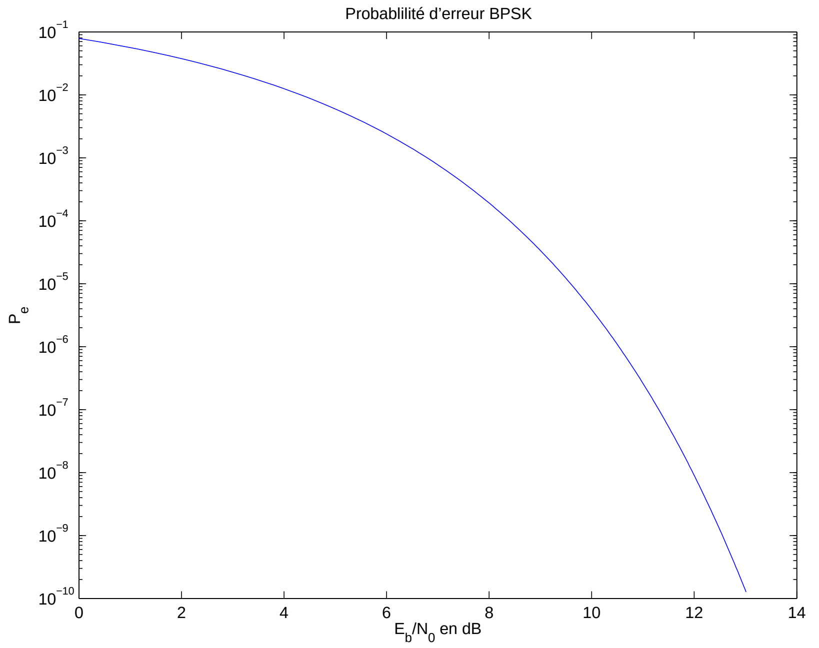
La fonction $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2/2} dt$.

$Q(x)$ = aire comprise en la courbe bleue et le segment rouge.



Quelques évaluations de performance IV.

Graphe de $Q(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}})$



Quelques évaluations de performances V.

$a_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1 \pm i)$, QAM4 : $E_b = \frac{E_s}{2}$.

$a_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{1,n} + i a_{2,n})$, $a_{i,n} = \pm 1$.

$y_n = \sqrt{2E_b} a_n + b_n$ donc $y_{i,n} = \sqrt{E_b} a_{i,n} + b_{i,n}$

Proba d'erreur sur $a_{i,n}$: $Q(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}})$

BPSK et QAM4 ont la même probabilité d'erreur

QAM4 est plus favorable car permet de transporter deux fois bits que BPSK dans la meme bande passante.

Quelques évaluations de performances VI.

Exemple de transmission non cohérente.

En pratique, $y_n = \sqrt{E_s} a_n e^{i\phi} + b_n$, avec ϕ inconnu.

ϕ peut-être estimé en émettant des symboles pilotes.

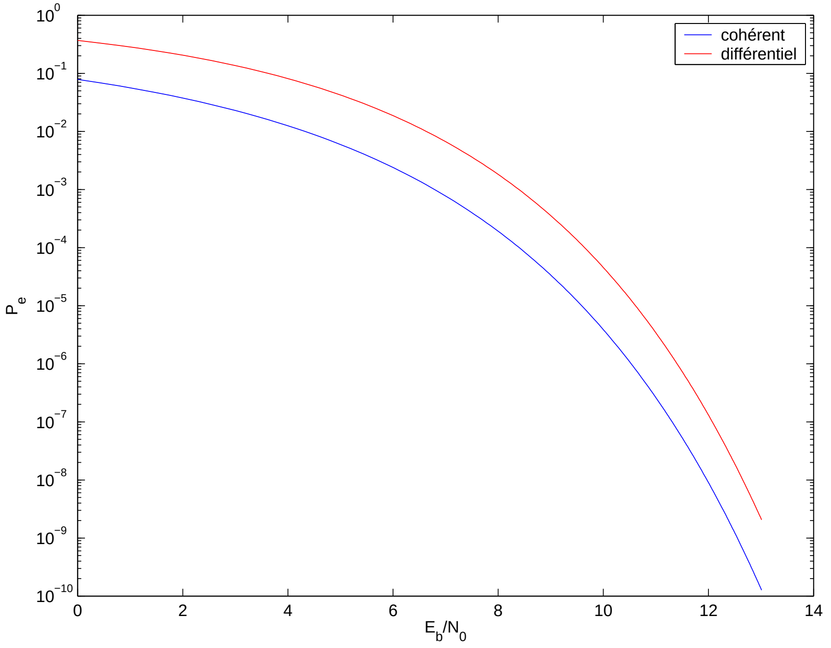
On peut aussi transmettre l'information dans $c_n = a_n a_{n-1}^*$: modulation différentielle.

$z_n = \frac{1}{\sqrt{E_s}} y_n y_{n-1}^* = \sqrt{E_s} a_n a_{n-1}^* +$ termes dus au bruit

Probabilité d'erreur en DBPSK : $P_e = \frac{1}{2} \exp -\frac{E_b}{N_0}$.

Quelques évaluations de performances VII.

Comparaison BPSK / DBPSK



Quelques évaluations de performances VIII.

Si $M > 2$, les approches non cohérentes occasionnent une perte d'environ 3 dB.

$$z_n = \sqrt{E_s} a_n a_{n-1}^* + a_n b_{n-1}^* + b_n a_{n-1}^* + \frac{1}{\sqrt{E_s}} b_n b_{n-1}^*$$

Variance de $a_n b_{n-1}^* + b_n a_{n-1}^* = 2N_0$