Délivrable WP 3-4 du projet SESAME ANR-07-MDCO-012-01

P. Bianchi, M. Debbah, M. Maida, J. Najim

15 septembre 2011

1 Résumé des travaux effectués

Le Volet WP 3-4 de notre travail a été consacré à certains problèmes d'inférence statistique appliqués à des modèles aléatoires matriciels de type "information plus noise". Par cette dénomination, on entend que les données collectées s'écrivent comme la somme d'un signal utile qui est l'objet de l'inférence, et d'un bruit blanc qui perturbe la mesure.

Nos travaux se sont concentrés sur une application particulièrement cruciale pour les systèmes de communications de future génération, à savoir la détection de bandes libre, en anglais *spectrum sensing*. Il s'agit de détecter la présence d'une source dans une bande de fréquences donnée, grâce à un réseau d'antennes ou de capteurs. Ce problème est d'un grand intérêt dans le cas de la *radio cognitive*. On suppose qu'un réseau sans fil, composé d'utilisateurs reliés à une station de base, cherche à découvrir si, dans une bande de fréquence donnée, un émetteur concurrent est déjà présent, ou si au contraire la bande en question est libre, auquel cas elle peut être exploitée par le réseau. Ajoutons que lorsque le réseau se met en activité, il ne dispose pas de connaissance *a priori* de la variance du bruit thermique, ce qui exclut l'utilisation de tests uniquement basés sur l'énergie du signal reçu.

Le problème peut être formulé comme suit. Considérons un réseau formé de K capteurs. Désignons par $\boldsymbol{y}(n) = [y_1(n), \ldots, y_K(n)]^T$ la série temporelle multivariée correspondant aux signaux reçus sur chacun des capteurs. Notre intérêt se porte sur le cas où la dimension K de la série observée est importante, ce qui signifie que le système comprend un nombre conséquent de capteurs ou d'antennes. L'objectif est de construire et d'analyser des tests statistiques correspondant aux hypothèses $\mathsf{H0}$ et $\mathsf{H1}$ suivantes :

$$\boldsymbol{y}(n) = \begin{cases} \boldsymbol{w}(n) : & \mathsf{H0} \\ \boldsymbol{h}\, s(n) + \boldsymbol{w}(n) : & \mathsf{H1} \end{cases}$$

où $\boldsymbol{w}(n)$ représente un bruit gaussien complexe circulaire centré de matrice de covariance égale à $\sigma^2 \mathbf{I}_K$. Le vecteur $\boldsymbol{h} \in \mathbb{C}^{K\times 1}$ est déterministe, et représente le canal de propagation entre la source et les K capteurs. Le signal d'information $s(n)$ est un processus i.i.d. scalaire complexe de moyenne nulle et de variance unité, qui représente le signal source à détecter. Nous avons supposé que $s(n)$ est gaussien afin de pouvoir calculer les performances des tests ci-après, mais il faut souligner que ces tests peuvent être utilisés indépendamment de la gaussianité de $s(n)$.

Supposons que N observations $y(n)$, $n = 0 \ldots N-1$, sont disponibles. Désignons par $\mathbf{Y} = [\boldsymbol{y}(0), \ldots, \boldsymbol{y}(N-1)]$ la matrice de taille $K \times N$ contenant les observations. Nous supposons au contraire que les paramètres $\boldsymbol{h}$ et σ^2 sont inconnus. Une approche classique consiste à remplacer, dans l'expression du rapport de vraisemblance, les vraies valeurs par leurs estimées au sens du maximum de vraisemblance. Ceci conduit au test du rapport de vraisemblance généralisé, ou GLRT (Generalized Likelihood Ratio Test). Le GLRT rejette l'hypothèse nulle pour de grandes valeurs du rapport :

$$T_N = \frac{\lambda_1}{\frac{1}{K}\,\mathrm{Tr}\,\hat{\mathbf{R}}}\ , \tag{1}$$

où $\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{N}\mathbf{Y}\mathbf{Y}^H$ représente la matrice de covariance empirique de la série reçue et λ_1 sa plus grande valeur propre.

Afin de compléter la définition du test, il convient de fournir une méthode permettant d'évaluer la *p-valeur* associée à une réalisation de T_N. Soit $p_N(t) = \mathbb{P}_0[T_N > t]$ la fonction de répartition complémentaire de T_N sous l'hypothèse $\mathsf{H0}$. Pour une observation donnée, la p-valeur est définie par $p_N(T_N)$. Une p-valeur proche de zéro implique que les données observées contredisent l'hypothèse nulle. Bien que la loi du rapport $T_N = \lambda_1/(\mathrm{Tr}\hat{\mathbf{R}}/K)$ sous $\mathsf{H0}$ peut être exprimée sous forme exacte, l'évaluation de $p_N(t)$ nécessite le calcul d'une intégrale multiple, intractable en grande dimension. Par conséquent, nous avons proposé une manière simple d'approcher la p-valeur. Notre approximation est valide dans le contexte où K et N sont de dimensions importantes. Nous supposons que $N \to \infty,\ K \to \infty,\ \frac{K}{N} \to c$, où c est une certaine constante strictement positive. En se basant sur un résultat de Johnstone (2000), on peut établir que la statistique T_N (correctement recentrée et renormalisée) converge en loi sous $\mathsf{H0}$ vers une variable aléatoire dite de Tracy-Widom. Si $\bar{F}_{TW}$ représente la fonction de répartition complémentaire de la loi de Tracy-widom, ceci implique que la p-valeur $p_N(T_N)$ peut être approximée par :

$$\tilde{p}_N(T_N) = \bar{F}_{TW}\left(\frac{N^{2/3}(T_N - (1+\sqrt{c_N})^2)}{b_N}\right)$$

en ce sens que $p_N(T_N) - \tilde{p}_N(T_N) \to 0$.

Dans un deuxième temps, nous avons étudié les performances asymptotiques de ce test afin, notamment, de le comparer à d'autres tests proposé dans le cadre de la littérature de radio cognitive.

Pour un niveau de significativité $\alpha \in (0,1)$, la probabilité de manque du test de niveau α s'écrit :

$$\beta_N(\alpha) = \inf\left\{\mathbb{P}_1\left[T_N < \gamma\right]\ :\ \gamma \text{ tel que } \mathbb{P}_0\left[T_N > \gamma\right] \le \alpha\right\}\ ,$$

où $\mathbb{P}_0$ et $\mathbb{P}_1$ représentent les probabilités sous $\mathsf{H0}$ et $\mathsf{H1}$. La puissance du test de niveau α est égale à $1 - \beta_N(\alpha)$. On définit la courbe ROC (Receiver Operating Characteristic) comme l'ensemble des couples $(\alpha, 1-\beta_N(\alpha))$ pour α décrivant l'intervalle $(0,1)$. Comme $\beta_N(\alpha)$ n'admet pas d'expression simple, nous étudions son comportement dans le régime $N \to \infty,\ K \to \infty,\ \frac{K}{N} \to c$.

Nous disons que le couple $(a,b) \in (0,\infty) \times (0,\infty)$ est une paire *atteignable* d'exposants d'erreur s'il existe une suite de niveaux de significativité α_N telle que :

$$\lim_{N\to\infty} -\frac{1}{N}\log\alpha_N = a \quad \text{et} \quad \lim_{N\to\infty} -\frac{1}{N}\log\beta_N(\alpha_N) = b\ .$$

On appelle $\mathcal{S}_T$ la courbe des exposants d'erreur, définie comme l'ensemble des couples (a,b) atteignables. La courbe des exposants d'erreur peut être interprétée comme la limite d'une courbe ROC représentée dans une échelle log-log (ou, pour être précis, la limite d'une courbe ROC renversée selon l'axe des abscisses $(\alpha, \beta_N(\alpha))$). Le cœur de notre travail a consisté à établir un principe de grandes déviations (PGD) sur la statistique de test T_N, à la fois sous l'hypothèse $\mathsf{H0}$ et sous $\mathsf{H1}$. Nous avons déterminé les fonctions de taux associées à ces deux PGD, que nous nommons $I_0^+(x), I_1^+(x)$ et qui sont disponibles et représentées dans notre article paru à IEEE Trans. on Inform. Theory (se reporter à la fin de ce rapport). Désignons par $\rho = \lim_{K\to\infty}\frac{\|\boldsymbol{h}\|^2}{\sigma^2}$ le rapport signal-sur-bruit limite. Posons $\lambda_+ = (1+\sqrt{c})^2$ et $\lambda_{\mathrm{spk}}^\infty = (1+\rho)\left(1+\frac{c}{\rho}\right)$. Finalement, nous avons le résultat suivant. La courbe des exposants d'erreur est donnée par :

$$\mathcal{S}_T = \left\{(I_0^+(x), I_1^+(x))\ :\ x \in (\lambda^+, \lambda_{\mathrm{spk}}^\infty)\right\}$$

si $\rho > \sqrt{c}$, et par $\mathcal{S}_T = \emptyset$ sinon.

Pour terminer, nous avons comparé les performances du GLRT aux performances d'un test populaire en radio cognitive, et qui consiste à rejeter l'hypothèse nulle lorsque le rapport λ_1/λ_K entre la plus grande et la plus petite valeur propre de la matrice de covariance empirique est supérieur à un seuil. Afin d'étudier ce test, il nous a fallu établir un principe de grandes déviations sur le couple (λ_1, λ_K), sous les deux hypothèses $\mathsf{H0}$ et $\mathsf{H1}$. Nous avons ainsi déterminé la courbe des exposants d'erreur $\mathcal{S}_U$ associée à ce test. Nous avons établi que, quelle que soit la valeur des paramètres $\boldsymbol{h}$ et σ^2, la courbe $\mathcal{S}_U$ était uniformément dominée par $\mathcal{S}_T$.

2 Etat du rapport

Le rapport a fait l'objet de de deux article de revue. Le premier est paru dans IEEE Transactions on Information Theory, revue de référence en théorie de l'information. Le second, qui met l'accent sur certains aspects théoriques liés à notre travail, a été publié dans Electronic Communications of Probability.

- P. Bianchi, M. Debbah, M. Maida, J. Najim "*Performance of Statistical Tests for Source Detection using Random Matrix Theory,*" IEEE Transactions on Information Theory, vol. 57, no. 4, pp. 2400-2419, April 2011.
- P. Bianchi, M. Debbah, J. Najim "*Asymptotic Independence in the Spectrum of the Gaussian Unitary Ensemble,*" Electronic Communications of Probability, vol. 15, Sept. 2010, pp. 376-395.

Ce travail a également fait l'objet de plusieurs communications dans des conférences de premier plan, avec actes, à la fois au niveau international (SSP'09, ITW'09) et national (GRETSI'09 qui est la plus importante conférence francophone en traitement du signal).

- P. Bianchi, J. Najim, M. Maida, M. Debbah "*Performance Analysis of Eigenbased Hypothesis Tests for Collaborative Sensing,*" SSP 2009, Cardiff, U.K.
- P. Bianchi, J. Najim, G. Alfano, M. Debbah "*Asymptotics of Eigenbased Collaborative Sensing,*" ITW 2009, Taormina, Italy.
- L. S. Cardoso, M. Debbah, P. Bianchi, J. Najim "*Cooperative Spectrum Sensing Using Random Matrix Theory,*" invited paper, ISPWC 2008, Santorini, Greece.
- L. Cardoso, P. Bianchi, J. Najim, M. Debbah, M. Maida "*Écoute Coopérative de Spectre pour la Radio Cognitive,*" GRETSI 2009, Dijon, France.

Enfin, plusieurs invitations à des séminaires ou conférences ont eu lieu :

- J. Najim, Physics-Inspired Paradigms in Wireless Communications and Networks (PHYSCOMNET), Seoul, 2009.
- J. Najim, International Workshop on Matrices and Statistics (IWMS), Shangai, 2010.
- P. Bianchi, Journées Modélisation Aléatoire et Statistique, Bordeaux, septembre 2010.