

Etude des canaux MIMO de Rice.

M. Debbah, J. Dumont, W. Hachem, S. Lasaulce, Ph. Loubaton, J.
Najim.

Canal MIMO de Rice.

Matrice aléatoire $N \times n$ $\tilde{\mathbf{H}}$ telle que

$$\tilde{\mathbf{H}} = \sqrt{\frac{K}{K+1}} \tilde{\mathbf{A}} + \sqrt{\frac{1}{K+1}} \tilde{\mathbf{Y}}$$

où:

- $\tilde{\mathbf{A}}$ déterministe, $\frac{1}{N} \text{Trace}(\tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{A}}^H) = 1$.
- $\tilde{\mathbf{Y}}$ matrice aléatoire Gaussienne centrée issue d'un champs stationnaire, $\frac{1}{N} \mathbb{E}(\text{Trace}(\tilde{\mathbf{Y}} \tilde{\mathbf{Y}}^H)) = 1$.
- $K > 0$ paramètre réglant la force relative des termes aléatoires et déterministes.

Un exemple de problème.

$$\text{Etude de } C(\sigma^2) = \frac{1}{N} \mathbb{E} \left[\log \det \left(\mathbf{I} + \frac{\tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{H}}^H}{\sigma^2} \right) \right].$$

Influence de K , de $\tilde{\mathbf{A}}$ et des propriétés statistiques de $\tilde{\mathbf{Y}}$ sur $C(\sigma^2)$.

Très difficile d'obtenir des éléments intéressants.

Considérer le régime asymptotique, et étudier $\frac{1}{N} \text{Trace}(\tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{H}}^H + \omega^2 \mathbf{I})^{-1}$ car :

$$C(\sigma^2) = \int_{\sigma^2}^{+\infty} \left(\frac{1}{\omega^2} - \mathbb{E} \left(\frac{1}{N} \text{Trace}(\tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{H}}^H + \omega^2 \mathbf{I})^{-1} \right) \right) d\omega^2$$

Le modèle de Kronecker.

Le modèle de Kronecker :

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{R}^{1/2} \bar{\mathbf{Y}} \tilde{\mathbf{R}}^{1/2}$$

avec \mathbf{R} et $\tilde{\mathbf{R}}$ matrices positives et $\bar{\mathbf{Y}}$ i.i.d. de variance $\frac{1}{N}$.

$\mathbf{R} = \mathbf{U}\mathbf{D}^2\mathbf{U}^H$ et $\tilde{\mathbf{R}} = \tilde{\mathbf{U}}\tilde{\mathbf{D}}^2\tilde{\mathbf{U}}^H$, on se ramène à:

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{K}{K+1}} \mathbf{A} + \sqrt{\frac{1}{K+1}} \mathbf{Y}$$

où les éléments de $\mathbf{Y}_{k,l}$ sont indépendants et de variances $\frac{1}{N}\sigma^2(k,l)$ avec $\sigma^2(k,l) = d_k^2 \tilde{d}_l^2$.

$\tilde{\mathbf{Y}}$ est issu d'un champs stationnaire.

$$\tilde{\mathbf{Y}} \simeq \mathbf{F}_N \mathbf{Y} \mathbf{F}_n^T$$

- \mathbf{F}_N et \mathbf{F}_n matrices de "Fourier" de dimensions N et n ,
- $\mathbf{Y}_{k,l}$ sont indépendants et de variances $\frac{1}{N} \sigma^2(k, l)$ où $\sigma^2(k, l) =$ densité spectrale du champ au point $(\frac{k}{N}, \frac{l}{n})$.

On se ramène donc à

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{K}{K+1}} \mathbf{A} + \sqrt{\frac{1}{K+1}} \mathbf{Y}$$

où les éléments de $\mathbf{Y}_{k,l}$ sont indépendants et de variances $\frac{1}{N} \sigma^2(k, l)$.

Conclusion sur le modèle.

Il est pertinent de considérer le modèle:

$$\mathbf{H} = \mathbf{A} + \mathbf{Y}$$

avec

- **A** déterministe
- $\mathbf{Y}_{k,l}$ indépendants, de variance $\frac{\sigma^2(k,l)}{N}$
- Modèle de Kronecker si le champ de variance est séparable.

Type de résultat souhaité.

Obtention d'un approximant déterministe de $\frac{1}{N} \text{Trace} ((\mathbf{H}\mathbf{H}^H + \sigma^2\mathbf{I})^{-1})$

Un résultat utilisable (Girko).

On pose:

$$\mathbf{Q}(z) = (\mathbf{H}\mathbf{H}^H - z\mathbf{I})^{-1}, \tilde{\mathbf{Q}}(z) = (\mathbf{H}^H\mathbf{H} - z\mathbf{I})^{-1}$$

.

Soit le système d'équations en $(\psi_i(z))_{i=1,\dots,N}, (\tilde{\psi}_j(z))_{j=1,\dots,n}$:

$$\psi_i(z) = \left[-z \left(1 + \frac{1}{N} \sum_{l=1}^n \sigma^2(i, l) \tilde{T}_{l,l}(z) \right) \right]^{-1}$$

$$\tilde{\psi}_j(z) = \left[-z \left(1 + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sigma^2(k, j) T_{k,k}(z) \right) \right]^{-1}$$

où

$$\mathbf{T}(z) = \left[\mathbf{\Psi}^{-1}(z) - \mathbf{A}^H z \tilde{\mathbf{\Psi}}(z) \mathbf{A} \right]^{-1}$$

$$\tilde{\mathbf{T}}(z) = \left[\tilde{\mathbf{\Psi}}^{-1}(z) - \mathbf{A} z \mathbf{\Psi}(z) \mathbf{A}^H \right]^{-1}$$

Alors, si les normes des lignes et des colonnes de \mathbf{A} sont bornées,

- Solution unique dans la classe des fonctions des transformées de Stieljès de mesures de probabilités portées par \mathbb{R}^+ .
- ps, $\frac{1}{N} \text{Trace}(\mathbf{Q}(z)) - \frac{1}{N} \text{Trace}(\mathbf{T}(z)) \rightarrow 0$ sur $\mathbb{C} - \mathbb{R}^+$.

Adaptation de la technique de Dozier-Silverstein.

Preuve plus simple que celle de Girko nécessitant la bornitude des normes \mathbb{L}^1 des lignes et des colonnes de \mathbf{A} .

Le cas du modèle de Kronecker

Déterminer $\frac{1}{N} \text{Trace}(\mathbf{T}(-\sigma^2)) =$ Résoudre une équation de 2 équations à 2 inconnues possédant une solution unique.

$$\delta = \frac{1}{N} \text{Trace} \left[\mathbf{D}^2 \left(\sigma^2 (\mathbf{I} + \mathbf{D}^2 \tilde{\delta}) + \mathbf{A} (I + \tilde{\mathbf{D}}^2 \delta)^{-1} \mathbf{A}^H \right)^{-1} \right]^{-1}$$

$$\tilde{\delta} = \frac{1}{N} \text{Trace} \left[\tilde{\mathbf{D}}^2 \left(\sigma^2 (\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{D}}^2 \delta) + \mathbf{A}^H (I + \mathbf{D}^2 \tilde{\delta})^{-1} \mathbf{A} \right)^{-1} \right]^{-1}$$

$\frac{1}{N} \text{Trace}(\mathbf{T}(-\sigma^2))$ est donné par:

$$\frac{1}{N} \text{Trace}(\mathbf{T}(-\sigma^2)) = \frac{1}{N} \text{Trace} \left[\sigma^2 (\mathbf{I} + \mathbf{D}^2 \tilde{\delta}) + \mathbf{A} (I + \tilde{\mathbf{D}}^2 \delta)^{-1} \mathbf{A}^H \right]^{-1}$$

$$C(\sigma^2) \simeq \bar{C}(\sigma^2) = \int_{\sigma^2}^{+\infty} \left(\frac{1}{\omega^2} - \left(\frac{1}{N} \text{Trace}(\mathbf{T}(-\omega^2)) \right) \right) d\omega^2$$

Quelques éléments sur la preuve (I).

Notations.

- $\mathbf{Q}(z) = (\mathbf{H}\mathbf{H}^H - z\mathbf{I})^{-1}$, $\tilde{\mathbf{Q}}(z) = (\mathbf{H}^H\mathbf{H} - z\mathbf{I})^{-1}$.
- $b_i(z) = \left[-z \left(1 + \frac{1}{N} \sum_{l=1}^n \sigma^2(i, l) \tilde{q}_{l, l}(z)\right)\right]^{-1}$
- $\tilde{b}_j(z) = \left[-z \left(1 + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sigma^2(k, j) q_{k, k}(z)\right)\right]^{-1}$
- $\mathbf{R}(z) = \left[\mathbf{B}^{-1}(z) - \mathbf{A}z\tilde{\mathbf{B}}(z)\mathbf{A}^H\right]^{-1}$
- $\tilde{\mathbf{R}}(z) = \left[\tilde{\mathbf{B}}^{-1}(z) - \mathbf{A}^Hz\mathbf{B}(z)\mathbf{A}^H\right]^{-1}$

Quelques éléments sur la preuve (II).

Montrer que pour toutes matrices \mathbf{U} et $\tilde{\mathbf{U}}$ bornées:

$$\frac{1}{N} \text{Trace} [\mathbf{Q}(z)\mathbf{U} - \mathbf{R}(z)\mathbf{U}] \rightarrow 0$$
$$\frac{1}{N} \text{Trace} [\tilde{\mathbf{Q}}(z)\tilde{\mathbf{U}} - \tilde{\mathbf{R}}(z)\tilde{\mathbf{U}}] \rightarrow 0$$

En déduire que

$$\frac{1}{b_i(z)} = -z \left(1 + \frac{1}{N} \sum_{l=1}^n \sigma^2(i, l) \tilde{R}_{l,l}(z) \right) + \epsilon_{i,1}(z)$$
$$\frac{1}{\tilde{b}_j(z)} = -z \left(1 + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sigma^2(k, j) R_{k,k}(z) \right) + \tilde{\epsilon}_{j,1}(z)$$

Quelques éléments sur la preuve (III).

Ce qui s'écrit

$$b_i(z) = \left[-z \left(1 + \frac{1}{N} \sum_{l=1}^n \sigma^2(i, l) \tilde{R}_{l,l}(z) \right) \right]^{-1} + \epsilon_{i,2}(z)$$
$$\tilde{b}_j(z) = \left[-z \left(1 + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sigma^2(k, j) R_{k,k}(z) \right) \right]^{-1} + \tilde{\epsilon}_{j,2}(z)$$

et qui permet de rapprocher $(b_i(z), \tilde{b}_j(z))$ de $(\psi_i(z), \tilde{\psi}_j(z))$, et $\mathbf{R}(z)$ de $\mathbf{T}(z)$.

Aspects applicatifs I.

$$\tilde{\mathbf{H}} = \sqrt{\frac{K}{K+1}} \tilde{\mathbf{A}} + \sqrt{\frac{1}{K+1}} \mathbf{R}^{1/2} \bar{\mathbf{Y}}$$

Matrices carrées.

Qualité de l'approximant déterministe.

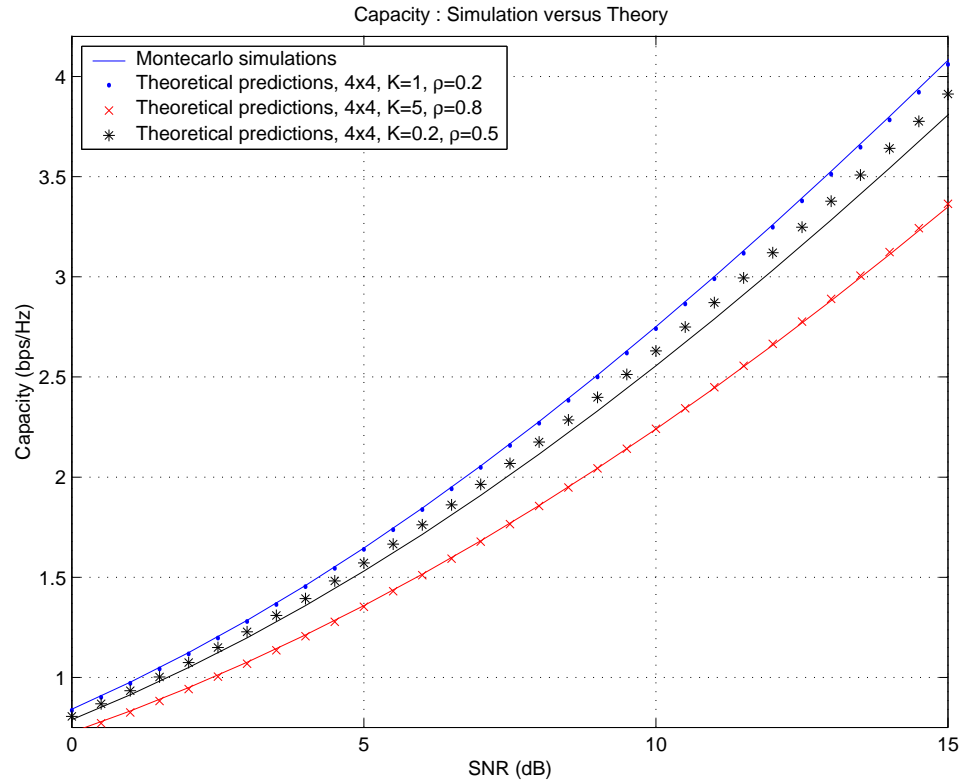


Figure 1: Qualité de l'approximant déterministe.

Si existence d'une équation limite.

$\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{A}}^H$ et \mathbf{R} Toeplitz.

Aspects applicatifs II.

Etude de $\bar{C}(\sigma^2)$ quand σ^2 grand.

- Si K fixé, capacité optimale si $\frac{K}{K+1} \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{A}}^H + \frac{1}{K+1} \mathbf{R}^2 = \mathbf{I}$.
- Si $\tilde{\mathbf{A}}$ et \mathbf{R} fixé, possibilité de trouver le K optimal.

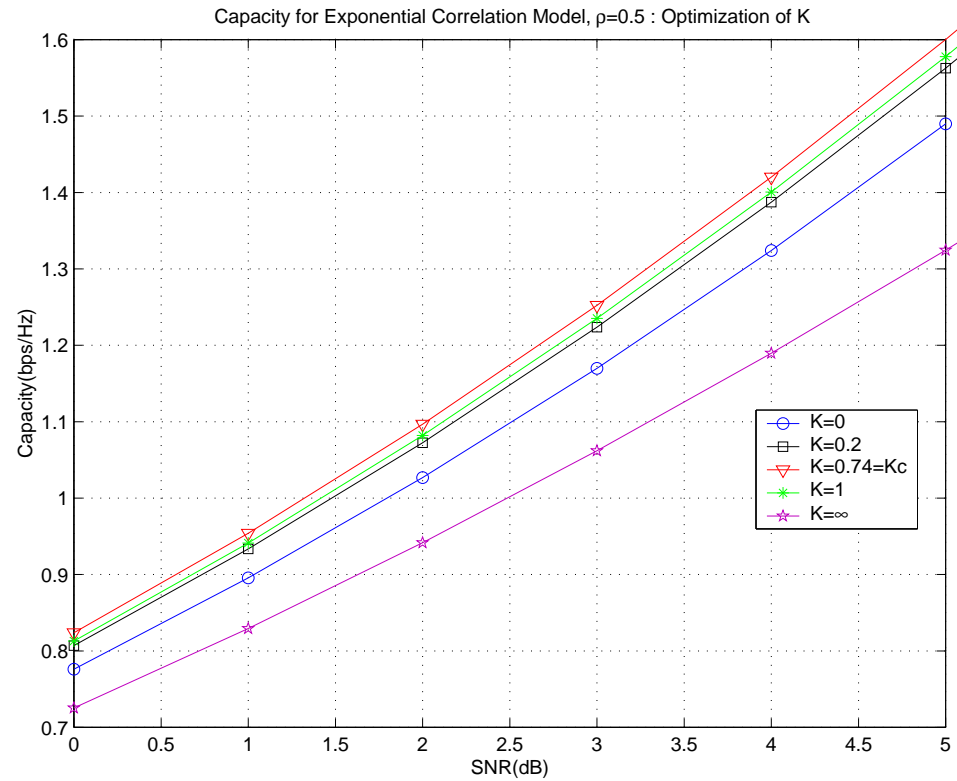


Figure 2: K opt.

Aspects applicatifs III.

Pour tout σ^2

- Si $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ et K fixé, capacité optimale si $\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{A}}^H = \mathbf{I}$.
- Si $\mathbf{A}\mathbf{A}^H = \mathbf{I}$, $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ n'optimise apparemment pas la capacité.

La suite des opérations.

- Evaluer $\max_{\mathbf{Q} \geq 0} \frac{1}{N} \mathbb{E} \left[\log \det \left(\mathbf{I} + \frac{\tilde{\mathbf{H}} \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{H}}^H}{\sigma^2} \right) \right]$ et la matrice \mathbf{Q} optimale en utilisant l'approximant.
- Théorème central limite sur $\log \det \left(\mathbf{I} + \frac{\tilde{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{H}}^H}{\sigma^2} \right)$.
- Il est aussi utile de s'intéresser à la convergence des éléments des résolvantes $\mathbf{Q}(z)$ et $\tilde{\mathbf{Q}}(z)$:

Etudier $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbb{E} \left[\Phi \left(\frac{1}{\bar{q}_{kk}(-\sigma^2)} - 1 \right) \right]$ (taux d'erreur).

Résultat disponible si les normes \mathbb{L}^1 des lignes et des colonnes de \mathbf{A} sont finies.

Illustration de la convergence du taux d'erreur.

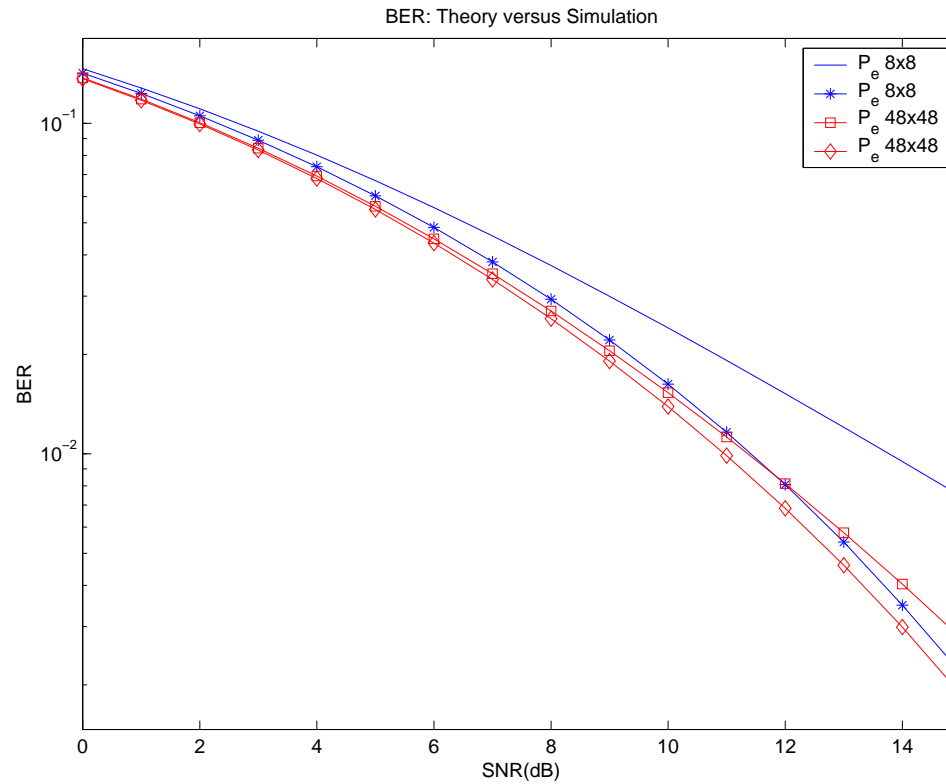


Figure 3: Taux d'erreur.