



Matrices aléatoires et télécommunications

Walid Hachem

Ecole Supérieure d'Electricité

11 juin 2004

CONTEXTE APPLICATIF

- Système de communication à accès multiple : les signaux de données émis par un certain nombre d'utilisateurs se propagent à travers le même milieu physique. La modulation de ces signaux est étudiée de sorte que le récepteur puisse isoler facilement les différentes contributions au signal somme reçu.
Système de référence de cette présentation : le CDMA (Code Division Multiple Access).
- Différents types de récepteurs : compromis charge de calcul / performance.
- Théorie des matrices aléatoires de grandes dimensions :
Evaluation plutôt explicite des performances de ces récepteurs, conception de certains d'entre eux facilitée.
- Meilleure compréhension de l'incidence des différents paramètres ("charge" du système, distribution des puissances, ...)
⇒ Meilleur contrôle par les organes de gestion du réseau.

CONTEXTE APPLICATIF (SUITE)

- L'utilisation des systèmes radio à antennes multiples MIMO (Multiple Input Multiple Output) permet d'accroître le débit des données.
- En effet, dans bon nombre de situations, la capacité de Shannon de ces systèmes croît linéairement avec le nombre d'antennes.
- La théorie des matrices aléatoires permet d'évaluer la capacité dans les conditions asymptotiques pour certains modèles statistiques de canaux.

PLAN

- Modèles cellulaires.
- Performances du récepteur de Wiener en CDMA.
 - Performance asymptotique en liaison descendante.
 - Analyse de la convergence.
 - Remarques sur la performance en liaison montante.
 - L'interférence entre cellules.
- Les récepteurs à rang réduit.
- Capacité des systèmes MIMO.
 - Présentation et intérêt.
 - Canaux à corrélations.

MATRICES ALÉATOIRES ET TÉLÉCOMS : QUELQUES DATES

- Tse et Hanly (99), Evans et Tse (00) : Performances asymptotiques de récepteurs linéaires pour certains systèmes CDMA.
- Foschini et Gans (96), Telatar (99) : Capacité de Shannon associée à un système MIMO. Verdú et Shamai (99, 00) : Capacités pour des systèmes CDMA.
- Tse et Zeitouni (00) : Une analyse de la convergence du rapport signal à bruit en sortie de récepteurs CDMA (TLC).
- Guo *et. al.* (99), Müller et Verdú (01), Honig et Xiao (01), ... : Conception et performances de récepteurs dits à rang réduit.
- Chuah *et.al.* (02), Müller (02), Mestre *et. al.* (03), ... : Capacités de systèmes MIMO plus réalistes.

Quelques modèles

TRANSMISSION RADIOMOBILE CDMA, SENS DESCENDANT

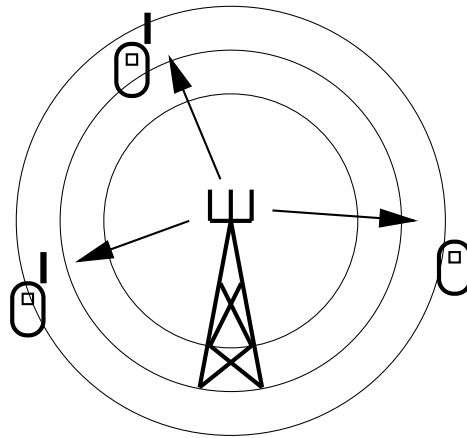


FIG. 1 – Liaison station de base vers mobiles

- K mobiles dans la cellule.
- Signal à valeurs dans $\mathbb{C}^N$ reçu par un mobile : trames de taille N , le "facteur d'étalement".
- Antenne de la station de base omnidirectionnelle : un mobile reçoit la somme des signaux destinés à tous les mobiles. Séparation par les codes (signatures).

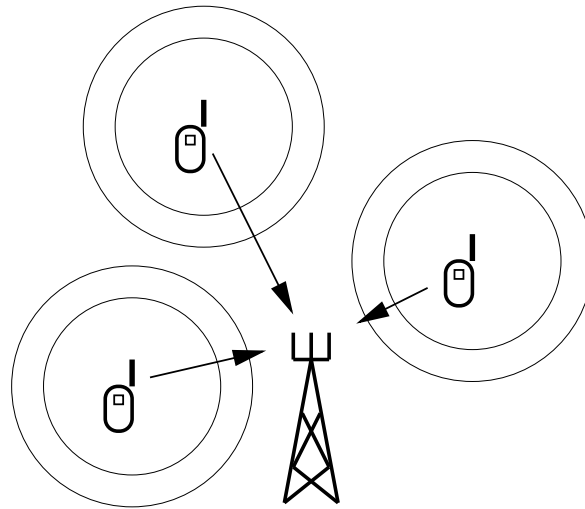
SENS DESCENDANT : MODÈLE DU SIGNAL REÇU PAR UN MOBILE

Trame n reçue par le mobile 1 :

$$\mathbf{y}_1(n) = \mathbf{H}_1 \mathbf{W} \sqrt{\mathbf{P}} \mathbf{s}(n) + \mathbf{v}_1(n)$$

- $\mathbf{H}_1$: Matrice de Toeplitz $N \times N$. Symbole $h_1(z) = \sum_{k=0}^M h_{k,1} z^{-k}$ associé : "canal radio" qui relie la station de base au mobile 1.
- $\mathbf{s}(n) = [s_1(n), \dots, s_K(n)]^T$: vecteur $K \times 1$ des "symboles" numériques (à ensemble de valeurs fini). $s_1(n)$ est destiné au mobile 1.
- $\mathbf{P} = \text{diag}([p_1, \dots, p_K])$: matrice diagonale $K \times K$ des puissances.
- $\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_K]$: matrice des signatures associées aux mobiles.
- $\mathbf{v}_1(n) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_N)$: bruit.

TRANSMISSION RADIOMOBILE CDMA DANS LE SENS MONTANT



Modèle du signal reçu par la station de base :

$$\mathbf{y}(n) = \sum_{k=1}^K s_k(n) \mathbf{H}_k \mathbf{w}_k + \mathbf{v}(n)$$

Autant de canaux différents (matrices de Toeplitz $\{\mathbf{H}_k = \mathcal{T}_N(h_k(z))\}$ où $h_k(z) = \sum_{l=0}^M h_{k,l} z^{-l}$) que de mobiles.

Application : le récepteur de Wiener

PERFORMANCE POUR UN SIGNAL CDMA DESCENDANT

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}(n) &= \mathbf{H} \begin{bmatrix} \mathbf{W} & \sqrt{\mathbf{P}} \\ \mathbf{w} & \mathbf{U} \end{bmatrix} \sqrt{\begin{bmatrix} p & \\ & \mathbf{Q} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} s(n) \\ \mathbf{s}_{2,K}(n) \end{bmatrix} + \mathbf{v}(n) \\
 &= \underbrace{\sqrt{p}s(n)\mathbf{H}\mathbf{w}}_{\text{signal utile}} + \underbrace{\mathbf{H}\mathbf{U}\sqrt{\mathbf{Q}}\mathbf{s}_{2,K}(n)}_{\text{Interf. multi-utilisateur}} + \underbrace{\mathbf{v}(n)}_{\text{bruit}}
 \end{aligned}$$

Récepteur linéaire de Wiener : on estime $s(n)$ selon $\hat{s}(n) = \mathbf{g}^H \mathbf{y}(n)$ où $\mathbf{g}$ minimise $E \left[|\hat{s}(n) - s(n)|^2 \right]$. Les variables aléatoires sont $s(n)$ et $\mathbf{v}(n)$.

$\hat{s}(n) = as(n) + b(n)$. Le "Rapport Signal à Interférence plus Bruit" (RSIB)

$\beta_N = a^2 / E \left[|b(n)|^2 \right]$ s'écrit

$$\beta_N = p \mathbf{w}^H \mathbf{H}^H (\mathbf{H}\mathbf{U}\mathbf{Q}\mathbf{U}^H \mathbf{H}^H + \sigma^2 \mathbf{I}_N)^{-1} \mathbf{H}\mathbf{w}$$

ANALYSE ASYMPTOTIQUE : HYPOTHÈSES

Interprétation difficile de l'expression de β_N . Donc

- On modélise la matrice des signatures $\mathbf{W}$ par une matrice aléatoire $N \times K$ et on étudie le comportement asymptotique de β_N pour une taille de trame $N \rightarrow \infty$.
Deux modèles :
 - Les éléments de $\mathbf{W}$ sont i.i.d., $E [[\mathbf{W}]_{11}] = 0$, $E [[\mathbf{W}]_{11}^2] = 1/N$. Exemple : le système américain IS95.
 - $\mathbf{W}$ est une matrice d'isométrie ($\mathbf{W}^H \mathbf{W} = \mathbf{I}_K$) aléatoire. Exemple : l'UMTS.
- On se place dans le cas où $\frac{K}{N} \rightarrow \alpha$, la "charge" du système.
- La matrice diagonale des puissances $\mathbf{P}$ possède une distribution-limite ν_P (stratégie d'allocation des puissances).
- Distribution-limite des valeurs propres de $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$ connue ($\mathbf{H}$ est de Toeplitz).

RSIB-LIMITE DANS LE CAS IID : PRINCIPE DE CALCUL

$$\frac{\beta_N}{p} = \mathbf{w}^H \underbrace{(\mathbf{U}\mathbf{Q}\mathbf{U}^H + \sigma^2(\mathbf{H}^H\mathbf{H})^{-1})^{-1}}_{\mathbf{A}^{-1}} \mathbf{w}$$

- $\mathbf{w}$ and $\mathbf{A}$ sont indépendants, donc $\frac{\beta_N}{p} - \frac{1}{N}\text{trace}(\mathbf{A}^{-1}) \rightarrow 0$ p.s.
- $\frac{1}{N}\text{trace}(\mathbf{A}^{-1}) \rightarrow G_{\mathbf{A}}(0)$ p.s. où $G_{\mathbf{A}}(z) = \int \frac{1}{t-z} \rho_{\mathbf{A}}(dt)$ est la transformée de Cauchy-Stieltjes associée à la distribution-limite $\rho_{\mathbf{A}}$ des valeurs propres de $\mathbf{A}$.
- Existence et caractérisation de $\rho_{\mathbf{A}}$: Silverstein et Bai (95, 98) ou probabilités libres si $\mathbf{W}$ est à éléments gaussiens.
- $G_{\mathbf{A}}(z)$ dépend de la charge α , de la d.l. des puissances ν_P et du canal $|h(e^{2i\pi f})|^2$.

RSIB-LIMITE DANS LE CAS ISOMÉTRIQUE

- On suppose que $\mathbf{W}$ résulte de l'extraction de K colonne d'une matrice unitaire $N \times N$ distribuée selon la mesure de Haar.
- Avec ce modèle pour $\mathbf{W}$,

$$\frac{\beta_N}{p} - \frac{1}{1-\alpha} \underbrace{\frac{1}{N} \text{trace} \left((\mathbf{I} - \mathbf{U}\mathbf{U}^H) (\mathbf{U}\mathbf{Q}\mathbf{U}^H + \sigma^2(\mathbf{H}^H\mathbf{H})^{-1})^{-1} \right)}_{\chi_N} \longrightarrow 0 .$$

- $\mathbf{U}\mathbf{Q}\mathbf{U}^H$ and $\mathbf{H}^H\mathbf{H}$ sont asymptotiquement libres p.p.
- χ_N s'écrit :

$$\chi_N = \frac{1}{N} \text{trace} (f_1 (\mathbf{U}\mathbf{Q}\mathbf{U}^H) f_2 (\mathbf{U}\mathbf{Q}\mathbf{U}^H + \sigma^2(\mathbf{H}^H\mathbf{H})^{-1}))$$

Biane (98) propose une méthode de calcul de l'espérance de $f_1(a_1) f_2(a_1 + a_2)$ où a_1 et a_2 sont des variables aléatoires libres. Il est donc possible de calculer la limite p.s. de χ_N .

RÉSULTATS

Cas isométrique : $\beta_N \xrightarrow{\text{p.s.}} \beta_{\text{isom}}$, solution de

$$\frac{\beta_{\text{isom}}}{p} = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\alpha E_{\nu_P} \left[\frac{X}{\frac{\beta_{\text{isom}}}{p} X + 1} \right] + \frac{\sigma^2}{|h(e^{2i\pi f})|^2} \left(1 - \alpha E_{\nu_P} \left[\frac{\frac{\beta_{\text{isom}}}{p} X}{\frac{\beta_{\text{isom}}}{p} X + 1} \right] \right)} df .$$

Cas iid : $\beta_N \xrightarrow{\text{p.s.}} \beta_{\text{iid}}$, solution de

$$\frac{\beta_{\text{iid}}}{p} = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\alpha E_{\nu_P} \left[\frac{X}{\frac{\beta_{\text{iid}}}{p} X + 1} \right] + \frac{\sigma^2}{|h(e^{2i\pi f})|^2}} df .$$

Application : le récepteur de Wiener

ANALYSE DE LA CONVERGENCE (TSE ET ZEITOUNI'00)

Simplification du modèle : $\mathbf{y}(n) = \mathbf{W}\mathbf{s}(n) + \mathbf{v}(n)$, $\mathbf{W}$ réelle à éléments iid.

RSIB en sortie du récepteur de Wiener : $\beta_N = \mathbf{w}^T (\mathbf{U}\mathbf{U}^T + \sigma^2 \mathbf{I}_N)^{-1} \mathbf{w}$.

$$\begin{aligned} \beta_N - \beta_{\text{iid}} &= \underbrace{\beta_N - \frac{1}{N} \text{trace} (\mathbf{U}\mathbf{U}^T + \sigma^2 \mathbf{I}_N)^{-1}}_{\theta_N} \\ &+ \underbrace{\frac{1}{N} \text{trace} (\mathbf{U}\mathbf{U}^T + \sigma^2 \mathbf{I}_N)^{-1} - E \left[\frac{1}{N} \text{trace} (\mathbf{U}\mathbf{U}^T + \sigma^2 \mathbf{I}_N)^{-1} \right]}_{\text{variance} = \mathcal{O}(1/N^2)} \\ &+ \underbrace{E \left[\frac{1}{N} \text{trace} (\mathbf{U}\mathbf{U}^T + \sigma^2 \mathbf{I}_N)^{-1} \right] - \beta_{\text{iid}}}_{= \mathcal{O}(1/N)} . \end{aligned}$$

$$\sqrt{N}\theta_N \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N} \left(0, \eta \left(\alpha, \sigma^2, E \left[[\mathbf{W}]_{1,1}^4 \right] \right) \right)$$

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE θ_N

- On suppose $[\mathbf{W}]_{ij} = v_{ij}/\sqrt{N}$ où $E[v_{11}] = 0$, $E[v_{11}^2] = 1$, $E[v_{11}^4] < \infty$.
- Décomposition spectrale : $\mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^T$
- Soit $[y_1, \dots, y_N]^T = \mathbf{Q}^T \mathbf{w}$ et $z_N(t) = \sqrt{\frac{N}{2}} \sum_{k=1}^{[Nt]} \left(y_k^2 - \frac{1}{N} \right)$ pour $t \in [0, 1]$.
- Tse et Zeitouni'00 (suite à Silverstein'90) :

$$z_N(t) \xrightarrow{\mathcal{D}} W^o(t) + At$$

W^o pont brownien, $A \sim \mathcal{N}(0, (E[v_{11}^4] - 1)/2)$, A et W^o indépendants.

"Comportement de type Haar" de $\mathbf{Q}$.

- Pour $f(x) = 1/(x + \sigma^2)$, nous avons

$$\begin{aligned} \theta_N &= \sqrt{N} \left(\mathbf{w}^T \mathbf{U} f(\mathbf{\Lambda}) \mathbf{U}^T \mathbf{w} - \frac{1}{N} \text{trace} f(\mathbf{\Lambda}) \right) \\ &= \sqrt{N} \sum_{k=1}^N \left(y_k^2 - \frac{1}{N} \right) f(\lambda_k) \end{aligned}$$

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE θ_N (SUITE)

La fonction de répartition empirique $F_N(x)$ des valeurs propres converge p.s. vers la loi (continue) de Marchenko-Pastur $F(x)$.

$$\begin{aligned} \frac{\theta_N}{\sqrt{2}} &= \int f(x) dz_N (F_N(x)) \\ &\xrightarrow{\mathcal{D}} \int f(x) (dW^o (F(x)) + A dF(x)) \end{aligned}$$

Convergence en distribution de θ_N vers une gaussienne dont on peut calculer la variance.

L'étude de $\sqrt{N}(\beta_N - \beta)$ pour des modèles de transmission plus réalistes n'a pas encore été faite.

Récepteur de Wiener : autres problèmes

LA LIAISON MONTANTE

RSIB associé à l'utilisateur 1 en liaison montante :

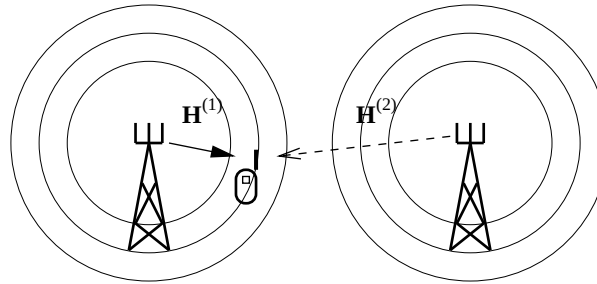
$$\begin{aligned}\beta_N &= \mathbf{w}_1^H \left(\sum_{k=2}^K \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{H}_k \mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^H \mathbf{H}_k^H \mathbf{H}_1^{-H} + \sigma^2 \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{H}_1^{-H} \right)^{-1} \mathbf{w}_1 \\ &= \mathbf{w}_1^H \left(\sum_{k=2}^K \boldsymbol{\xi}_k \boldsymbol{\xi}_k^H + \sigma^2 \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{H}_1^{-H} \right)^{-1} \mathbf{w}_1\end{aligned}$$

- $\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_K]$ à éléments iid.
- Les vecteurs $\{\boldsymbol{\xi}_k\}$ sont indépendants.
- Pour N grand, il semble que $\beta_N \simeq \bar{\beta} \sum_{m=0}^M |h_{1,m}|^2$ où

$$\bar{\beta} = \frac{1}{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^K \frac{\sum_{m=0}^M |h_{k,m}|^2}{1 + \bar{\beta} \sum_{m=0}^M |h_{k,m}|^2} + \sigma^2} \quad (\text{Evans et Tse'00})$$

- Justification probable dans le cas où $\mathbf{W}$ est à éléments gaussiens : résultats de Boutet de Monvel *et.al.*'96 ou de Girko'00. Besoin d'hypothèses sur $\{h_k(z)\}$.

PRISE EN COMPTE DE L'INTERFÉRENCE ENTRE CELLULES



Signal $\mathbf{y}(n)$ reçu par le mobile et RSIB β_N en sortie du récepteur :

$$\mathbf{y}(n) = \underbrace{\mathbf{H}^{(1)} \mathbf{W}^{(1)} \sqrt{\mathbf{P}^{(1)}} \mathbf{s}^{(1)}(n)}_{\text{Signal utile}} + \underbrace{\mathbf{H}^{(2)} \mathbf{W}^{(2)} \sqrt{\mathbf{P}^{(2)}} \mathbf{s}^{(2)}(n)}_{\text{Interf. entre cellules}} + \mathbf{v}(n)$$

$$\beta_N = \mathbf{w}^H \left(\mathbf{U}^{(1)} \mathbf{P}^{(1)} \mathbf{U}^{(1)H} + \mathbf{H}^{(1)-1} \mathbf{H}^{(2)} \mathbf{W}^{(2)} \mathbf{P}^{(2)} \mathbf{W}^{(2)H} \mathbf{H}^{(2)H} \mathbf{H}^{(1)-H} + \sigma^2 \mathbf{H}^{(1)-1} \mathbf{H}^{(1)-H} \right)^{-1} \mathbf{w}$$

- Probabilités libres + hypothèses sur $\mathbf{W}^{(1)}$ et $\mathbf{W}^{(2)}$: convergence de β_N assurée.
- Procédure de calcul de la limite de β_N ?

Récepteurs à rang réduit

SITUATION DU PROBLÈME

Exemple de modèle : $\mathbf{y}(n) = s_1(n)\mathbf{w} + \underbrace{\mathbf{U}\sqrt{\mathbf{Q}}\mathbf{s}_{2,K}(n)}_{\mathbf{x}(n)} + \mathbf{v}(n)$

- Récepteur de Wiener pour $s(n)$: $\hat{s}(n) = \gamma \mathbf{w}^H \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{y}(n)$ où $\mathbf{R}_x = E[\mathbf{x}\mathbf{x}^H]$.
- Inversion de la matrice $\mathbf{R}_x$ coûteuse en temps de calcul pour N grand.
- Récepteur polynômial de degré $M - 1$ avec $M \ll N$:

$$\hat{s}_M(n) = \mathbf{w}^H \sum_{m=0}^{M-1} a_m \mathbf{R}_x^m \mathbf{y}(n) = \mathbf{a}_M^T \mathbf{K}_M^H \mathbf{y}(n)$$

où $\mathbf{K}_M = [\mathbf{w}, \mathbf{R}_x \mathbf{w}, \dots, \mathbf{R}_x^{M-1} \mathbf{w}]$ et $\mathbf{a}_M^T = [a_0, \dots, a_{M-1}]$.

- Vecteur des coefficients $\mathbf{a}_M$: minimise $E[|\hat{s}_M(n) - s(n)|^2]$.
- Wiener à rang réduit : le signal reçu est projeté sur le sous-espace de Krylov $\text{span}(\mathbf{K}_M)$.

REMARQUES SUR LA CONCEPTION ET LES PERFORMANCES

Calcul des coefficients :

Calcul de $\mathbf{a}_M$ (résolution de l'équation de Wiener-Hopf) : Besoin de

$$\{\mathbf{w}^H \mathbf{R}_x^m \mathbf{w}\}_{m=0, \dots, 2M+1}.$$

Le temps de calcul processeur de ce vecteur est grandement réduit si ces quantités sont remplacées par leurs limites p.s. quand $N \rightarrow \infty$.

RSIB asymptotique ($N \rightarrow \infty$). Comportement en M :

On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{w}^H \mathbf{R}_x^k \mathbf{w} \xrightarrow{\text{p.s.}} \int_0^\infty t^k d\mu(t)$$

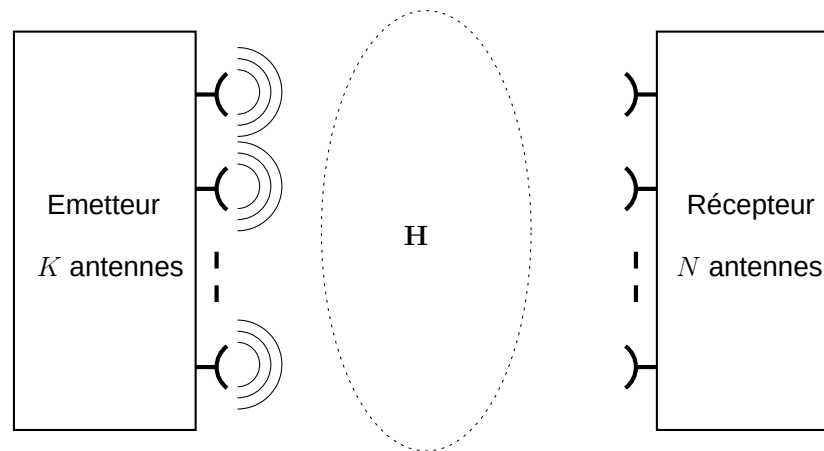
où μ est une mesure de probabilité à support compact $[\delta_1, \delta_2] \subset (0, \infty)$ absolument continue.

Le RSIB du rang réduit de dimension M tend vers le RSIB du récepteur de Wiener (à "rang plein") exponentiellement en M .

Justification par la théorie des polynômes orthogonaux.

Capacité de Shannon d'un canal MIMO

MODÈLE MIMO NON CONVOLUTIF



Modèle du signal reçu :

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{H}\mathbf{s}(n) + \mathbf{v}(n)$$

$\mathbf{H}$: matrice $N \times K$ qui représente le canal :

- Surfaces réfléchissantes, diffuseurs, ...
- $\mathbf{H}$: modèle de matrice aléatoire.

$$\mathbf{v}(n) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_N).$$

INTÉRÊT DES SYSTÈMES MIMO

- Canal $\mathbf{H}$ aléatoire non connu de l'émetteur.
- $\mathbf{s} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \frac{P}{K} \mathbf{I}_K)$ où P est la puissance totale émise.
- Capacité de Shannon :

$$\mathcal{C} = E \left[\log \det \left(\mathbf{I}_N + \frac{P}{\sigma^2} \frac{1}{K} \mathbf{H} \mathbf{H}^H \right) \right] \text{ nats .}$$

- Soit la variable aléatoire

$$C_N = \frac{1}{N} \log \det \left(\mathbf{I}_N + \frac{P}{\sigma^2} \frac{1}{K} \mathbf{H} \mathbf{H}^H \right)$$

Modèle : $\mathbf{H}$ est à éléments gaussiens iid centrés de variance 1.

- Quand $N \rightarrow \infty$ et $K/N \rightarrow \alpha$, C_N converge p.s. vers une quantité déterministe.
- Variance en $1/N^2$. Approximation asymptotique valable rapidement.

Résultat pratique : débit de données élevé car la capacité croît linéairement en N .

Problème : calcul de la limite de C_N pour des modèles plus réalistes de $\mathbf{H}$.

UN MODÈLE MIMO PLUS GÉNÉRAL

Les antennes d'émission ou de réception peuvent être proches les unes des autres
⇒ Besoin de modèles qui prennent en compte la corrélation.

Modèle étudié par Chuah *et.al.*'02 : $\mathbf{H} = \mathbf{\Psi}^{1/2} \mathbf{W} \mathbf{\Phi}^{1/2}$ où

- $\mathbf{W}$ est à éléments iid, $\mathbf{W}_{11} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
- $\mathbf{\Psi}$ et $\mathbf{\Phi}$ sont des matrices de covariance de Toeplitz.

$E \left[[\mathbf{H}]_{pj} [\mathbf{H}]_{qk}^* \right] = [\mathbf{\Phi}]_{j-k} [\mathbf{\Psi}]_{p-q}$: modèle séparable, "stationnarité spatiale" à l'émission ($\mathbf{\Phi}$) et à la réception ($\mathbf{\Psi}$).

Plus généralement : $E \left[[\mathbf{H}]_{pj} [\mathbf{H}]_{qk}^* \right] = V(p - q, j - k)$.

CARACTÉRISATION DE LA CAPACITÉ

Dérivée par rapport à $\eta = P/\sigma^2$ en prenant $K/N = \alpha$:

$$\begin{aligned}\frac{dC_N}{d\eta} &= \frac{1}{\eta} - \frac{\alpha}{\eta^2} \frac{1}{N} \text{trace} \left(\frac{\alpha}{\eta} \mathbf{I}_N + \frac{1}{N} \mathbf{H} \mathbf{H}^H \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{\eta} - \frac{\alpha}{\eta^2} G_N \left(-\frac{\alpha}{\eta} \right)\end{aligned}$$

où $G_N(z) = \int \frac{1}{t-z} d\mu_N(t)$ est la Transformée de Stieltjes (TS) associée à la distribution μ_N des valeurs propres de $\frac{1}{N} \mathbf{H} \mathbf{H}^H$.

Existence et TS $G(z)$ de la distribution-limite : Girko'01 et Boutet de Monvel *et.al.*'96.
 $G(z)$ est déterminée par la transformée de Fourier

$$\tilde{V}(u, v) = \sum_{k, l \in \mathbb{Z}} V(k, l) e^{-2i\pi(uk+vl)}$$