Licence EEA
2002 - 2003

TD 5 de Mathématiques
Transformée de Fourier (3) et Espaces de Hilbert

Exercice I
Soit $x(s,t)$ une fonction de $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^2)$ dont on note $\widehat{x}(s,f)$ la transformée de Fourier par rapport à la variable t.
On fait les hypothèses suivantes :
- x est deux fois différentiable
- $\dfrac{\partial x}{\partial t}(s,t)$ et $\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}(s,t)$ sont dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^2)$
- $\lim\limits_{|t|\to\infty} \dfrac{\partial x}{\partial t}(s,t) = 0$.

De plus, on suppose que $\dfrac{\partial x}{\partial s}(s,t)$ a pour transformée de Fourier (toujours par rapport à la variable t) $\dfrac{\partial \widehat{x}}{\partial s}(s,f)$. (Cette propriété est facile à vérifier si $t \mapsto |\dfrac{\partial x}{\partial s}(s,t)|$ est majorée par une fonction $g(t)$ sommable.)

1. Quelle est la transformée de Fourier (par rapport à t) de $\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}(s,t)$?
2. Résoudre l'*équation de la chaleur* :
$$\frac{\partial x}{\partial s}(s,t) = K\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}(s,t), \qquad K \in \mathbb{R}_+^*$$
pour $s \geq 0$, sachant que $x(0,t) = y(t)$.

Exercice II
Soit H un espace préhilbertien complexe.
1. Montrer l'égalité du parallélogramme :
$$\forall (x,y) \in H^2, \qquad \|x-y\|^2 + \|x+y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)\ .$$
2. En déduire l'égalité de la médiane :
$$\forall (a,b,c) \in H^3, \qquad \|a-b\|^2 + \|a-c\|^2 = 2\|a-m\|^2 + \frac{1}{2}\|b-c\|^2$$
où m est le milieu du segment $[b,c]$.

Exercice III
Soit H un espace préhilbertien complexe et $(x, y) \in H^2$.
On considère la fonction

$$\begin{aligned} f \ : \ \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \lambda &\longmapsto \|x - \lambda y\|^2 \ . \end{aligned}$$

1. Développer l'expression de $f(\lambda)$.
2. On suppose que $y \neq 0$ et on pose

$$\lambda = \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} \ .$$

   Quelle est l'inégalité obtenue ? Cette inégalité reste-t-elle valable quand $y = 0$?
3. En déduire la condition d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz.