Université de Marne la Vallée
M1 IMIS

Optimisation

Corrigé N° 1

Ce corrigé ne devrait être consulté qu'à titre de vérification de votre travail ou, après une période "significative" de recherche faisant suite à une relecture assidue de vos notes de cours.

Exercices d'application directe du cours

Exercice 1

1. On vérifie que la matrice nulle appartient à S_n et que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(A, B) \in (S_n)^2$, $(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A + \beta B \in S_n$. S_n est donc un s.e.v. de l'espace des matrices réelles de dimension $n \times n$. Une base de S_n est formée des matrices $(E^{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ telles que, pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ avec $i \leq j$, $E^{i,j} = (e^{i,j}_{k,l})_{1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq n}$ où
$$e^{i,j}_{k,l} = \begin{cases} 1 & \text{si } (k,l) = (i,j) \text{ ou } (k,l) = (j,i) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
En décomptant le nombre d'éléments de la base, on voit que S_n est un e.v. de dimension $n(n+1)/2$.
2. Pour tout $(A, B) \in (S_n)^2$, notons $A = (a_{k,l})_{1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq n}$ et $B = (b_{k,l})_{1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq n}$. Par calcul immédiat
$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(AB^T) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{k,l} b_{k,l}. \tag{1}$$
On reconnaît ainsi l'expression d'un produit scalaire euclidien classique. Dans la suite, on notera $\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(AB)$.
3. Rappelons que S_n^+ est l'ensemble des matrices A de S_n telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,
$$x^T A x \geq 0.$$
Quel que soit $A \in S_n^+$, on a donc, pour tout $\alpha > 0$,
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad x^T (\alpha A) x = \alpha x^T A x \geq 0$$
ce qui montre que $\alpha A \in S_n^+$. Par ailleurs, pour tout $(A, B) \in (S_n^+)^2$ et tout $\alpha \in [0, 1]$,
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad x^T (\alpha A + (1-\alpha) B) x = \alpha x^T A x + (1-\alpha) x^T B x \geq 0$$
ce qui montre que $\alpha A + (1-\alpha) B \in S_n^+$. On en déduit que S_n^+ est un cône convexe dont le sommet est la matrice nulle.
Considérons maintenant une suite $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'élements de S_n^+ qui converge vers $A \in S_n$. Ceci signifie que $\|A_i - A\| \to 0$ quand $i \to \infty$ où $\|.\|$ est la norme associée au produit scalaire précédent :
$$\forall B \in S_n, \qquad \|B\| = (\mathrm{tr}(B^2))^{1/2}.$$
On a alors, par continuité du produit scalaire : pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,
$$x^T A_i x = \mathrm{tr}(A_i x x^T) = \langle A_i, x x^T \rangle \geq 0 \xrightarrow[i \to \infty]{} \langle A, x x^T \rangle = x^T A x$$
ce qui implique que $x^T A x \geq 0$ et que $A \in S_n^+$. Ceci permet de conclure que S_n^+ est un cône fermé convexe.

4. Pour tout $x \in \mathbb{X}$, on peut écrire $f(x) = Ax + b$ où A est un opérateur linéaire de X vers Y et $b \in Y$.
On a
$$f(C) = \{y \in Y \mid \exists x \in C, y = f(x)\}.$$
Pour tout $(y_1, y_2) \in f(C)^2$ et tout $\alpha \in [0,1]$, il existe $(x_1, x_2) \in C^2$ tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. On a donc
$$\alpha y_1 + (1-\alpha)y_2 = \alpha(Ax_1 + b) + (1-\alpha)(Ax_2 + b) = A(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) + b = f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2).$$
C ayant été supposé convexe, $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in C$ et, par conséquent, $\alpha y_1 + (1-\alpha)y_2 \in f(C)$.
Par ailleurs,
$$f^{-1}(D) = \{x \in X \mid f(x) \in D\}.$$
Pour tout $(x_1, x_2) \in f^{-1}(D)^2$ et tout $\alpha \in [0,1]$,
$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = \alpha(Ax_1 + b) + (1-\alpha)(Ax_2 + b) = \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2).$$
D étant convexe et $(f(x_1), f(x_2)) \in D^2$, on a $\alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2) \in D$, ce qui permet d'affirmer que $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in f^{-1}(D)$. Il a ainsi été démontré que $f^{-1}(D)$ est convexe.
5. Définissons l'application f de $\mathbb{R}^p$ vers S_n qui, à tout $x = (x_1, \ldots, x_p)$, associe $f(x) = B - \sum_{i=1}^p x_i A_i$. Cette application est affine. Par ailleurs, l'ensemble considéré s'écrit
$$\{x \in \mathbb{R}^p \mid f(x) \succeq 0\}.$$
Il s'agit donc de $f^{-1}(S_n^+)$. On déduit des résultats des questions 3 et 5 que cet ensemble est convexe. S'agissant de l'image réciproque d'un fermé par une application continue, on peut affirmer qu'il s'agit d'un convexe fermé.

Exercice 2

1. Remarquons tout d'abord que $\|\cdot\|$ est bien définie sur X puisque, si x est continue sur $[a,b]$, elle est absolument intégrable sur cet intervalle. Il s'agit clairement d'une application de X vers $\mathbb{R}_+$.
Il nous reste à vérifier les propriétés d'une norme qui, dans ce cas, apparaissent comme des conséquences immédiates de celles de la valeur absolue et de l'intégrale.
   (a) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in X$,
$$\|\lambda x\| = \int_a^b |\lambda\, x(t)|\, dt = |\lambda| \int_a^b |x(t)|\, dt = |\lambda|\, \|x\|.$$
   (b) $\forall (x,y) \in X^2$,
$$\|x+y\| = \int_a^b |x(t)+y(t)|\, dt \le \int_a^b (|x(t)|+|y(t)|)\, dt = \int_a^b |x(t)|\, dt + \int_a^b |y(t)|\, dt = \|x\| + \|y\|.$$
   (c) $\forall x \in X$,
$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow \int_a^b |x(t)|\, dt = 0,$$
ce qui signifie que x est presque partout nulle sur $[a,b]$ et la continuité de x permet alors d'affirmer qu'elle est nulle sur tout l'intervalle.
2. Pour montrer que X muni de cette norme n'est pas complet il suffit de trouver une suite de Cauchy de cet espace qui ne converge pas. Considérons la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions affines par morceau définies par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [a,b], \quad x_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \le t \le \dfrac{a+b}{2}, \\ \dfrac{2(n+1)}{b-a}\left(t - \dfrac{a+b}{2}\right) & \text{si } 0 < t - \dfrac{a+b}{2} < \dfrac{b-a}{2(n+1)}, \\ 1 & \text{si } \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{b-a}{2(n+1)} \le t \le b. \end{cases}$$

Il s'agit de fonctions de X (*i.e.* continues sur $[a, b]$).
Montrons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de X. Pour cela, pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \geq n$, calculons

$$\|x_m - x_n\| = \int_a^b |x_m(t) - x_n(t)|\, dt.$$

En raisonnant sur les graphes des fonctions x_n et x_m, on trouve par un calcul élémentaire d'aire :

$$\|x_m - x_n\| = \frac{(b-a)}{4}\Big(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1}\Big).$$

On voit ainsi que

$$\|x_m - x_n\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0,$$

ce qui est la caractéristique d'une suite de Cauchy.
Si l'on considère maintenant la fonction y définie par

$$\forall t \in [a, b], \quad y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \leq t \leq \dfrac{a+b}{2}, \\ 1 & \text{si } \dfrac{a+b}{2} < t \leq b, \end{cases}$$

on a

$$\|x_n - y\| = \frac{(b-a)}{4(n+1)}.$$

Par conséquent, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait dans X vers une limite x_∞, on aurait

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - y\| = \|x_\infty - y\| = 0.$$

Les fonctions x_∞ et y étant continues sur $[a, (a+b)/2[$ et $](a+b)/2, b]$, elles seraient donc égales sur ces intervalles. Ceci contredit évidemment l'hypothèse de continuité de x_∞ en $(a+b)/2$.